République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Civil et d’Hydraulique
Laboratoire de Génie Civil et d’Hydraulique

THÈSE

EN VUE DE L’OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT

Domaine : Sciences et Technologie **Filière : Génie Civil**
Spécialité : Mécanique des chaussées, Matériaux et Géotechnique Routière (MCMGR)

Présentée par

Hamza GUENFOUD

Intitulée

Modélisation par éléments finis spéciaux des structures en matériaux à gradient fonctionnel

Soutenue le : 21 Février 2019 Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	Grade	Université	Qualité
Mr. Benmarce Abdelaziz	Professeur	Université du 8 mai 1945 Guelma	Président
Mr. Guenfoud Mohamed	Professeur	Université du 8 mai 1945 Guelma	Encadreur
Mr. Bouzerd Hamoudi	Professeur	Université 20 Aout 1955 Skikda	Examinateur
Mr. Cherait Yacine	Professeur	Université du 8 mai 1945 Guelma	Examinateur
Mr. Hacen-Chaouch Abdelmadjid	Professeur	Université Badji Mokhtar Annaba	Examinateur

Année Universitaire 2018-2019

إهــــــــــــــداء

إلى بلدي الغالي وعشقي ووجداني

إلى جذوري وأرضي وعنواني

جزائري، شرفي وإيماني

إلى معلمي وأستاذي الذي أضاء طريقي وأنار عقلي، إلى رجل الأخلاق الطيبة، إلى أبي الحبيب

إلى من أقر لها بالفضل الأكبر في نجاحي وتوفيقي، إلى من أتنفس هواها وأطلب رضاها، أمي الحبيبة

إلى سندي وظهري، إلى أغلى وأعز الرجال، أخي عبد الرحيم

إلى ملائكتي وحبيباتي، أخواتي، إسلام، زينب، وأميمة

إلى أقاربي وأصدقائي وأحبائي

إلى أساتذتي

DEDICACE

A mon pays précieux, mon amour et ma sensation

Pour mes racines, ma terre et mon adresse

Algérie, mon honneur et ma foi

À mon professeur, qui a éclairé mon chemin et ma lumière mentale, à un homme de bonne moralité, à mon père bien-aimé.

À celui qui m'a donnée la plus grande confiance dans mon succès et mon compromis, à qui je respire son air et je lui demande satisfaction, ma mère bien-aimée.

A mon soutien et appui, à l'homme le plus précieux et le plus chers, mon frère Abdel Rahim

À mes anges et mes bien-aimés, mes sœurs, Islem, Zeyneb et Omyma

À mes proches, amis et aimés

A mes professeurs

REMERCIEMENT

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Génie Civil et d'Hydraulique de la Faculté des Sciences et de la Technologie de l'université 8 mai 1945 sous la supervision et la direction du Professeur GUENFOUD Mohamed. Je tiens à lui exprimer mes profonds remerciements de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Il ne serait pas possible de construire ce travail sans sa motivation. Il m'a fourni toutes sortes de soutiens et d'aide. Le processus serait insupportable sans ses conseils inestimables. Je tiens à lui témoigner toute ma reconnaissance pour son aide et sa rigueur scientifique. Ses encouragements constants et son amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de cette recherche. Je tiens à remercier les membres du jury ; particulièrement Monsieur le Professeur Benmarce Abdelaziz qui m'a fait l'honneur de présider le jury et Messieurs les professeur : Bouzerd Hamoudi, Cherait Yacine et Hacen-Chaouch Abdelmadjid qui ont accepté d'examiner le présent travail. J'exprime ma profonde gratitude à Messieurs les Professeurs : Nouaouria Mohamed Salah directeur du Laboratoire de Génie Civil et d'Hydraulique (LGCH) ; Belabed Lazhar Chef du Département de Génie Civil et d'Hydraulique et à tous les enseignants et membres du département de génie civil de l'université 8 mai 1945 pour leur chaleureux accueil et soutien. J'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenu et encouragée au cours de la réalisation de cette thèse. Mes remerciements vont aussi à tous mes collègues pour leur soutien moral et leur gentillesse. Comme je remercie toute personne de près ou de loin qui ont aidé à la réalisation de cette thèse de doctorat. Finalement, je présente ma plus profonde gratitude à mon père Pr Guenfoud Mohamed, ma mère Fatma Feddaoui, mon frère Abderrahim, mes sœurs : Islem, Zeyneb et Omyma pour leurs amours et leurs compassions sans fin.

REMERCIEMENT

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Génie Civil et d'Hydraulique de la Faculté des Sciences et de la Technologie de l'université 8 mai 1945 sous la supervision et la direction du Professeur GUENFOUD Mohamed. Je tiens à lui exprimer mes profonds remerciements de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Il ne serait pas possible de construire ce travail sans sa motivation. Il m'a fourni toutes sortes de soutiens et d'aide. Le processus serait insupportable sans ses conseils inestimables. Je tiens à lui témoigner toute ma reconnaissance pour son aide et sa rigueur scientifique. Ses encouragements constants et son amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de cette recherche. Je tiens à remercier les membres du jury ; particulièrement Monsieur le Professeur Benmarce Abdelaziz qui m'a fait l'honneur de présider le jury et Messieurs les professeur : Bouzerd Hamoudi, Cherait Yacine et Hacen-Chaouch Abdelmadjid qui ont accepté d'examiner le présent travail. J'exprime ma profonde gratitude à Messieurs les Professeurs : Nouaouria Mohamed Salah directeur du Laboratoire de Génie Civil et d'Hydraulique (LGCH) ; Belabed Lazhar Chef du Département de Génie Civil et d'Hydraulique et à tous les enseignants et membres du département de génie civil de l'université 8 mai 1945 pour leur chaleureux accueil et soutien. J'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenu et encouragée au cours de la réalisation de cette thèse. Mes remerciements vont aussi à tous mes collègues pour leur soutien moral et leur gentillesse. Comme je remercie toute personne de près ou de loin qui ont aidé à la réalisation de cette thèse de doctorat. Finalement, je présente ma plus profonde gratitude à mon père Pr Guenfoud Mohamed, ma mère Fatma Feddaoui, mon frère Abderrahim, mes sœurs : Islem, Zeyneb et Omyma pour leurs amours et leurs compassions sans fin.

الملخـــــص

واحدة من المزايا الرئيسية للمركبات المصفحة هو القدرة على توجيه ألياف من كل رقيقة قصد تحسين خواصها الميكانيكية، مثل قوتها وصلابتها المفيدة. وبالرغم من هذه الخصائص الممتازة، فإن الرقائق لها مشكلة خاصة بالمواد المركبة المصنوعة بواسطة التصفيح: ألا وهو التمزق الداخلي، المعروف تحت الاسم التقني بواسطة ."Delamination" لقد ولدت محاولة إنتاج مواد متدرجة وظيفيا (FGM) من خلط مادتين بطريقة تحافظ فيها المادتان على خصائصهما الفيزيائية، الميكانيكية والحرارية على نحو أكثر فعالية. المادة الناتجة FGM تشير على تدرج في عمق الهيكل، من مادة معدنية نموذجية مثل الصلب أو الألومنيوم على جانب واحد من العمق، إلى مادة أخرى مثل السيراميك على الجانب الآخر. وبالتالي، فإن التدرج الوظيفي أو المواد المتدرجة وظيفياً (FGM) هي تشكيلة جديدة من المواد المركبة التي لها تغير تدريجي ومستمر للكسور (للأجزاء) الحجمية لكل من المكونات (بشكل عام، المعادن والسيراميك) عبر السماكة، مما يؤدي إلى تغييرات في الخصائص الحرارية-الميكانيكية العامة للعنصر الهيكلي التي تشكله المادة الناجمة. في دراستنا هذه، يتم أخذ التغيير في خصائص المواد وفقًا لقانون القوة (الأس). وهذا مما يسمح لهذه المركبات بالقدرة على الحد، بشكل كبير، من تأثير التبطين (التمزق الداخلي)، وتكاثف الإجهاد المصادفين في المركبات التقليدية، ولكن الأهم هو وجود ميزة جديدة في هذه المركبات لم تكن موجودة من قبل. لذلك، فقد تم تصميم هذه المواد المركبة FGM للتغلب على مشكلة التمزق بين طبقتين (التبطين) من ناحية، ولعلاج المشاكل التي تسببها البيئات الحرارية الشديدة من جهة أخرى. تحليل الهياكل المركبة من المواد المتدرجة وظيفياً (FGM) يتطلب إنشاء أدوات لنمذجت السلوك الميكانيكي المتطور بشكل متزايد، بما في ذلك الحساب بواسطة العناصر المحدودة الذي أصبح أمر ضروري لتحديد حجم هذه الهياكل المعقدة والتحقق منها. في هذه الأطروحة، تم تطوير دالة قص عرضية جديدة تعتمد على نظرية العارضة عالية الترتيب لتحليل سلوك الانحناء للعوارض المركبة من المواد المتدرجة وظيفيا (FGM). النظرية الحالية تأخذ في الاعتبار تأثير القص العرضي من جهة ولا تتطلب استخدام عامل تصحيح القص المستعرض من ناحية أخرى. كما تعطي هذه النظرية وصف مكافئ لإجهاد القص عبر السمك مع احترام حالة إجهاد القص المنعدم على الحواف الحرة للهيكل (العارضة) المركب من المواد المتدرجة وظيفيا (FGM). تم إجراء مقارنة بين مختلف النظريات عالية الترتيب مع تلك المقدمة في العمل الحالي. أبرزت هذه المقارنة قيمة دالة القص المطورة (الحالية) مع اللواتي الموجودات في المراجع (الدوال المرجعية). بعد ذلك، تم تطوير عنصر محدود جديد قشري مستوي الوجه المطور على صيغة التشوه لحالة المادة المتنحية. العنصر هو نتيجة تراكب عنصر غشائي مع عنصر صفيحي (لوحة) في الانحناء. إنه عنصر مثلثي ذو ثلاث عقد لكل

عقدة ستة درجات حرية. لذلك يتم أخذ الدوران حول العمود (الدوران الرأسي) بعين الاعتبار. توضح مقارنة نتائجنا مع الحلول المرجعية الأداء الجيد ودقة النتائج للعنصر الغشائي المطور (المصاغ). في المرحلة التالية، تم إثراء وتطوير هذا العنصر القشري بحيث يمكنه تصميم هياكل مركبة من المواد المتدرجة وظيفيا FGM). تحقيقا لهذه الغاية تم تمديد تطويرات إضافية حتى يتسنى للعنصر نمذجت الهياكل المركبة من المواد المتدرجة وظيفيا (FGM). في هذه الحالة، يجب مراعاة اقتران تفاعل سلوك الغشاء مع الانحناء. يوفر العنصر المقترح تحليلات خطية قوية ودقيقة للقشريات المركبة من المواد المتدرجة وظيفيا (FGM) مقارنة بالنهج المؤسس على الإزاحة. توضح مقارنة نتائجنا مع حلول المواجهة أن العنصر المطور هو عنصر تنافسي، قوي، كفء ودقيق.

الكلمات المفتاحية: مادة، مركب، تدرج، وظيفي، عارضة، غشاء، صفيحة، قشرة، عنصر محدود، تشوه، تكثف ثابت، دوران الحفر، تبطين.

ABSTRACT

One of the primary advantages of laminated composites is the ability to orient the fibers of each layer to optimize its mechanical properties such as strength and convenient stiffness. Notwithstanding these excellent properties, laminates have a problem specific to composite materials made by lamination: This is the inter-laminar rupture, known under the technical name by the 'Delamination'. The attempt to produce functional gradient materials (FGM) was born from the mixing of two materials in such a way that the two materials preserve their physical, mechanical and thermal properties most effectively. The resultant material FGM shows a gradation across the depth of the structure, from a typically metallic material such as steel or aluminum on one side of the depth, to another material such as ceramic on the other side. Thus, the functional gradient or functionally graded material (FGM) is a new variety of composite materials having a gradual and continuous variation of the volume fractions of each constituents (in general, metal and ceramic) across the thickness, inducing changes as a result of the global thermo-mechanical properties of the structural element it constitutes. The change in the properties of the materials for our study takes according to a power law. This allows these composites the capability to significantly reduce the delamination effect and stress concentration encountered in conventional composites, but the most important is to have a new function that did not exist before. Therefore, the FGM material designed to overcome the inter-laminar rupture problem (delamination) on the one hand and on the other hand to remedying the problems caused by severe thermal environments. The analysis of structures in FGM, requires to establish a tools for modeling mechanical behavior increasingly sophisticated, including finite element calculation is essential for conception, designated and verification of these complex structures. In the present thesis, we develop a new transverse shear function based on a high order beam theory to analyze the bending behavior of FGM beams. The present theory takes into account the transverse shear effect on the one hand and on the other hand, it does not require the use of transverse shear correction factor. It gives a parabolic description of the shear stress across the thickness while respecting the condition of zero shear stress on the free edges of the FGM structure (beam). We made a comparison between the different high orders theories with that developed in the present work. This comparison highlighted the present shear function with those found in the literature. Then, we develop a new flat shell element based on the strain formulation for the case of an isotropic material. The element is the result of the superposition of a membrane element with a bending

plate element. It is a plane triangular element with three nodes and six degrees of freedom for each node. Therefore, the rotation around the normal is considered. The comparison of our results with reference solutions shows the good performance and precision of the formulated shell element. In a second time, we enrich and enlarge the development of this shell element so that it can model FGM structures. For this purpose, we extend additional developments for the established element to model FGM structures. In this case, a membrane-bending coupling is necessarily to be taken into account. The proposed element provides robust and accurate linear analyzes of FGM shells relative to the displacement approach. Comparing our results with confrontational solutions shows that the developed element is competitive, robust, efficient and accurate.

Key words: Material, composite, gradient, functional, beam, membrane, plate, shell, finite element, strain formulation, static condensation, drilling rotation, and delamination.

RESUME

L’un des avantages primordiaux des composites stratifiés est l’aptitude d’orienter les fibres de chaque pli afin d’optimiser ses propriétés mécaniques telles que la résistance et la rigidité utile. Nonobstant ces excellentes propriétés, les stratifiés présentent un problème propre aux matériaux composites réalisés par stratification : Il s’agit de la rupture inter-laminaire, connue sous l’appellation technique par le ‘Délaminage’. La tentative de produire des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) est née du mélange de deux matériaux de telle manière que les deux matériaux conservent leurs propriétés physiques, mécaniques et thermiques le plus efficacement. Le matériau résultant FGM montre une gradation à travers la profondeur de la structure, d'un matériau typiquement métallique tel que l'acier ou l'aluminium à une face de la profondeur, à un autre matériau tel que la céramique sur l'autre face. Donc, le matériau à gradient fonctionnel ou fonctionnellement gradué (FGM) est une nouvelle gamme de matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants (en général, métal et céramique) à travers l’épaisseur, induisant des changements, en conséquence des propriétés thermomécaniques globales de l’élément structural qu’il constitue. Le changement des propriétés des matériaux est pris selon une loi de puissance pour notre étude. Cela permet à ces composites la possibilité de réduire significativement l’effet du délaminage et de la concentration des contraintes rencontrées chez les composites conventionnels, mais le plus important est d'avoir une nouvelle fonctionnalité qui n'existait pas avant. Donc, le matériau FGM a été conçus pour pallier au problème de la rupture inter-laminaire (le délaminage) d’une part et pour remédier aux problèmes engendrés par des environnements thermiques sévères d’autre part. L’analyse des structures en FGM nécessite de mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués, notamment, le calcul par la méthode des éléments finis est indispensable pour le dimensionnement et la vérification de ces structures complexes. Dans cette thèse, une nouvelle fonction de cisaillement transversal basé sur une théorie de poutre d’ordre élevé a été développée afin d’analyser le comportement en flexion des poutres FGM. La présente théorie prend en compte l’effet de cisaillement transverse d’une part et elle n'exige pas l’utilisation de facteur de correction de cisaillement transversal d’autre part. Elle donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l’épaisseur tout en respectant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la structure (poutre) en FGM. Une comparaison entre les différentes théories d’ordre élevé avec celle développée dans le présent travail a été dressée. Cette comparaison a mis en valeur la présente fonction de cisaillement

avec celles se trouvant dans la littérature. Puis, un nouvel élément de coque à facette plane basé sur la formulation en déformation a été développé pour le cas d'un matériau isotrope. L'élément est le résultat de la superposition d'un élément de membrane et d'un élément de plaque en flexion. C'est un élément triangulaire plan, à trois nœuds et à six degré de liberté par nœuds. Donc, la rotation autour de la normale est prise en considération. La comparaison de nos résultats avec des solutions de références montre la bonne performance et la précision de l'élément de coque formulé. Dans un deuxième temps le développement de cet élément de coque est enrichi et élargie pour qu'il puisse modéliser des structures en FGM. A cet effet des développements supplémentaires ont été étendu pour que l'élément puisse modéliser des structures en FGM. Dans ce cas un couplage membrane-flexion est forcément à prendre en compte. L'élément proposé fournit des analyses linéaires robustes et précises des coques en FGM par rapport à l'approche fondée sur le déplacement. La comparaison de nos résultats avec des solutions de comparaison montre que l'élément développé est compétitif, robuste, performant et précis.

Mots clés : Matériau composite, gradient fonctionnel, poutre, membrane, plaque, coque, élément fini, formulation en déformation, condensation statique, drilling rotation, délaminage.

Table des matières

Introduction générale

Chapitre 1: Etude bibliographique sur les matériaux composites

Chapitre 2: Elément linéique en FGM

Chapitre 3: Formulation d'un élément de coque mince triangulaire à facette plane

Chapitre 4: Elément de coque pour les FGM

Conclusions générales et perspectives

Liste des figures

Introduction générale

Chapitre 1 : Etude bibliographique sur les matériaux composites

Chapitre 2 : Elément linéique en FGM

Chapitre 3 : Formulation d'un élément de coque mince triangulaire à facette plane

Chapitre 4 : Elément de coque pour les FGM

Liste des tableaux

Chapitre 1 : Etude bibliographique sur les matériaux composites

Chapitre 2 : Elément linéique en FGM

Chapitre 3 : Formulation d'un élément de coque mince triangulaire à facette plane

Chapitre 4 : Elément de coque pour les FGM

Liste des notations

x , y, z	Coordonnées Cartésiennes
a_1, a_2, a_3, a_i	Paramètres d'interpolation
$\{a_i\}$	Vecteur des paramètres d'interpolation
L, a	Longueur
B, b	Largeur
h	Épaisseur de la plaque
t	Temps
u,v,w	Déplacements de translation dans les directions x, y et z
u_0,v_0,w_0	Déplacement du plan moyen selon les directions x, y et z
N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}	Efforts normaux par unité de longueur
M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}	Moments de flexion par unité de longueur
Q_{xx}, Q_{yy}	Efforts tranchants par unité de longueur
q	Charge uniforme (par unité de longueur/surfacique)
$\{\sigma\}$	Tenseur de contrainte
$\{\varepsilon\}$	Tenseur de déformation de Cauchy
$\{E\}$	Tenseur de déformation de Green-Lagrange
$[C]$	Matrice d'élasticité
ρ	Densité de masse
ρ_m	Densité du Métal
ρ_c	Densité de Céramique
E	Module de Young
E_m	Module de Young du Métal
E_c	Module de Young de la Céramique
$\widehat{D}$	Rigidité équivalente à la flexion
ν	Coefficient de Poisson
α_f	Coefficient de dilatation thermique
I_1, I_2, I_3	Inerties de déplacement et rotation
V_m	Fraction volumique
E	Le module d'élasticité longitudinal (Module de Young)
E(z)	Le module d'élasticité longitudinal (Module de Young) en fonction de z
E_c	Le module d'élasticité longitudinal (Module de Young) de la céramique

E_m	Le module d'élasticité longitudinal (Module de Young) du métal
G	Le module d'élasticité du cisaillement transversal
G(z)	Le module d'élasticité du cisaillement transversal en fonction de z
G_c	Le module d'élasticité du cisaillement transversal de la céramique
G_m	Le module d'élasticité du cisaillement transversal du métal
ν	Le coefficient de Poisson
ν (z)	Le coefficient de Poisson en fonction de z
ν_c	Le coefficient de Poisson de la céramique
ν_m	Le coefficient de Poisson du métal
ρ	La masse volumique, densité
ρ (z)	La masse volumique en fonction de z
ρ_c	La masse volumique de la céramique
ρ_m	La masse volumique du métal
p	Paramètre de la fraction volumique du matériau
P_i	Propriétés du matériau constitutif i
V_{fi}	Fraction volumique du matériau constitutif i
α	Coefficient de dilatation thermique.
κ	Conductivité thermique
T	Température
L	La longueur
b	La largeur
h	Epaisseur
V	Volume
A, S	Section, surface
R	Rayon
u, v, w	Déplacements de translations
θ_x, θ_y, θ_z	Rotations autour des axes x, y, z
θ_z	Rotation autour de la normale, drilling rotation
β_x, β_y	Les pentes (les rotations de la normale) suivants les directions x et y
K_x, K_y, K_{xy}	Les courbures
ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz}	Déformations normales
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de cisaillement
ε_{xy}, ε_{xz}, ε_{yz}	

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Les contraintes normales
$\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	Les contraintes tangentielles
$[C], [D]$	Matrices des constantes d'élasticité
δw_{int}	Travail virtuel interne
δw_{ext}	Travail virtuel externe
$[N]$	Matrice des fonctions de forme
f_s	Force surfacique
f_v	Force volumique
M_0	Point matériel, particule
$f(z)$	Fonction de cisaillement
$F(x,y)$	Fonction d'Airy
MP_m et MP_c	représentent respectivement les propriétés matérielles des métaux et des céramiques
MP_{eff}	Les propriétés du matériau effectif
$\widehat{D}_{aa}, \widehat{D}_{ab}, \widehat{D}_{bb}$	Rigidités d'une section en FGM
$\psi_x(x)$	La fonction de gauchissement. La déformation de cisaillement à la ligne moyenne de la poutre.
$\{q^e\}$	Vecteur élémentaire des déplacements nodaux
$[f(x,y)]$	Matrice des polynômes d'interpolation
$[A]$	Matrice élémentaire des coordonnées nodales
K	Paramètre de correction de cisaillement transversal
$[K_m]$	Matrice de rigidité de membrane
$[K_f]$	Matrice de rigidité de flexion
$[K_c]$	Matrice de rigidité de cisaillement
$[B_m]$	Matrice de déformation de membrane
$[B_f]$	Matrice de déformation de flexion
$[B_c]$	Matrice de déformation de cisaillement
ϕ_z	Coefficient caractérisant la déformation transversal d'une section
$\partial, \partial^2, \partial^3, \partial^4$	Dérivées partielles première, deuxième, troisième et quatrième

Liste des abréviations

FGM	Functionally graded material
MGF	Matériau à gradient fonctionnel
EBBT	Euler-Bernoulli Beam Theory
TBT	Timoshenko Beam Theory
HOBT	High Order Beam Theory
HSDT	Higher Shear Deformation Theory
CBT	Classical Beam Theory
FSDBT	First Shear Deformation Beam Theory
TTR	Third-order Theory of Reddy
PSDT	Parabolic Shear Deformation Theory
TSDT	Trigonometric Shear Deformation Theory
ESDT	Exponential Shear Deformation Theory
DDL	Degré de liberté
DOF	Degree of freedom
MSR	Mouvement de solide rigide
MCR	Movement de corps rigide
DKT	Discrete Kirchhoff Triangular
CST	Constant Strain Triangular
THS	Triangular Hybrid Stress
QHS	Quadrilateral Hybrid Stress
MITC	Mixed Interpolation of Tensorial Components
SBT	Strain Based Triangular
T43_Eq	Elément fini triangulaire de membrane à quatre nœuds et à trois degré de liberté par nœud basé sur les équations d'équilibre.

Introduction générale

SOMMAIRE

Introduction générale

1. Généralités

Les matériaux ont joué un rôle important dans la société humaine tout au long de l'histoire. L'humanité a toujours essayé de produire des matériaux plus résistants et très solides pour construire des structures durables servant d'abri pour l'être humain. Aux premiers temps de la civilisation (1500 av. J.C.), les Égyptiens et les Mésopotamiens mélangent de la paille et de la boue pour fabriquer des briques dans le but de construire des bâtiments assez résistants et plus durables. Par la suite, en 1800, le béton devient un composite largement utilisé. Il se génère en mélangeant le ciment, l'agrégat et l'eau. Plus tard, au début des années 1900, le plastique renforcé de fibres, un composite composé d'une matrice polymère renforcée de fibres, devient un matériau fondamental pour l'industrie aérospatiale, automobile, maritime et de la construction.

Actuellement, la meilleure manière pour combiner deux matériaux, en conservant leurs propriétés, consiste à les assembler d'un pourcentage variable sur la section transversale. Par exemple, l'ancrage d'une surface en céramique sur le dessus et d'une surface en acier sur le dessous avec une zone de transition lisse, appelée matériau à gradation fonctionnelle (FGM). Il est accepté comme un meilleur moyen de collage plutôt que de les déposer directement sans gradation. Par cette technique, les deux matériaux préservent leurs meilleures propriétés, comme la haute résistance, la rigidité élevée, la résistance à haute température, la faible densité de la céramique et la ténacité et la malléabilité de l'acier. Les FGM s'utilisent dans plusieurs industries et secteurs comme l'aérospatiale, le nucléaire, la défense, l'automobile, la communication, l'énergie, etc. En plus d'être produits artificiellement, les formes primitives des FGM existent dans la nature. L'os, la peau humaine, l'arbre de bambou peuvent être considéré comme des formes physiologiques d'FGM. La figure 1 illustre plusieurs exemples organiques et artificiels évoquant les FGM.

Les domaines d'application des FGM se résument comme suit :

L'Aérospatial : Les boucliers thermiques pour engins spatiaux, les tubes échangeurs de chaleur.

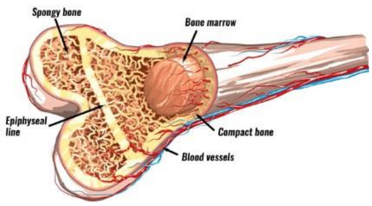
Le Biomédical : L'os artificiel, la peau et les dents.

La Communication : Les fibres optiques, les lentilles et les semi-conducteurs.

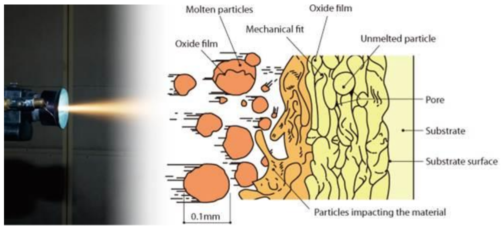
Le Domaine du nucléaire : Les palettes de combustible, la paroi de plasma des réacteurs de fusion.

Le Secteur de l'énergie : Les générateurs thermoélectriques, les cellules solaires et les capteurs.

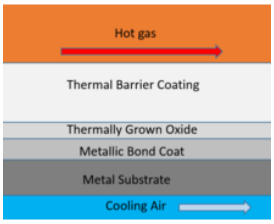
L’Automobile : Les systèmes de transmission de puissance et les systèmes de freinage.



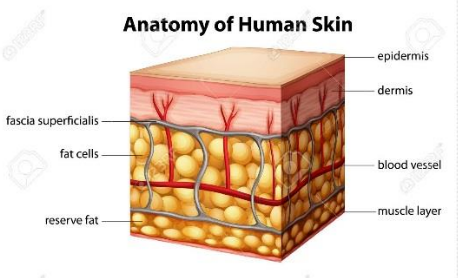
Structure d’un Os



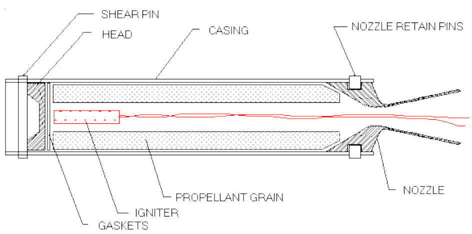
revêtement thermique



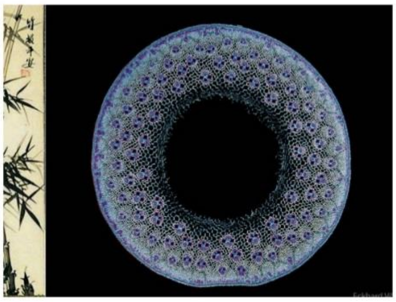
revêtement de barrière thermique



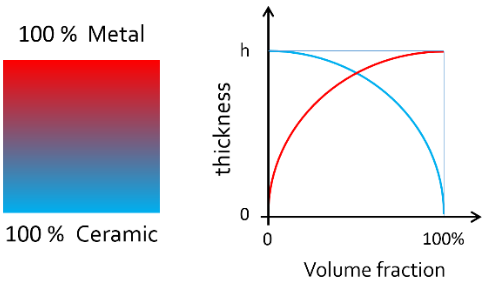
Structure d’une peau humaine



Fusée



Structure du tronc d’arbre de bambou



Métal-céramique FGM



Plaque en FGM

Figure 1 Illustrations organiques et artificielles pour FGM

Le concept théorique de production des FGM a été proposé en 1984 au Japon (Jha et al., 2013). Le processus de fabrication et de conception des FGM devient le sujet capital d'intérêt au cours des trois dernières décennies. La fabrication des FGM se discute sous deux aspects, à savoir la gradation et la consolidation. La gradation forme la structure spatialement inhomogène. Les processus de gradation se catégorisent en processus constitutifs, d'homogénéisation et de ségrégation. Les processus constitutifs découlent d'une génération par étapes du corps gradué à partir de matériaux pionniers ou de poudres. Les progrès de la technologie d'automatisation au cours des dernières décennies ont assuré la viabilité technologique et économique des processus constitutifs. L'homogénéisation est la mutation de la transition subite entre deux matériaux en un gradient. Le processus de ségrégation commence avec un matériau macroscopiquement homogène, qui se transforme en un matériau gradué par le transport de matière provoqué par un champ externe (un champ magnétique ou gravitationnel). Les processus d'homogénéisation et de ségrégation produisent des gradients continus ; cependant de tels procédés ont des limites concernant la distribution des matériaux à produire. Le processus de consolidation, tels que le séchage, le frittage ou la solidification, vient généralement après le processus de gradation. Les critères de traitement doivent être déterminés de telle sorte que le gradient ne soit pas détruit ou modifié de façon non restreinte (Kieback et al. 2003).

2. Enquête sur la modélisation par éléments finis des FGM

Dans le but d'évoluer vers une production et une utilisation plus efficace des matériaux FGM dans les applications d'ingénierie, plusieurs techniques de conception, d'analyse et de calcul ont également été proposées.

L'analyse des structures en FGM a connu un envol en utilisant les méthodes numériques surtout la méthode des éléments finis.

Les poutres, les membranes, les plaque et les coques constituent des éléments de base dans les structures aérospatiales, marines et des construction civil et industriels, c'est pourquoi un intérêt remarquable est porté, pour bien appréhender leur comportement sous diverse sollicitations est une phase décisive dans l'analyse structurelle.

La plupart des analyses des éléments structuraux en FGM reposent sur la théorie de l'élasticité. Il convient de mentionner que ces analyses proposent des solutions spécifiques aux problèmes de charge et aux conditions aux limites et elles se focalisent uniquement sur les comportements élastiques linéaires des matériaux. Une alternative

à une telle analyse serait le développement d'éléments finis : de poutre, de membrane, de plaque, de coque et d'éléments finis solides permettant l'analyse des problèmes de modélisation des structures en FGM. Il est à noter que même les logiciels disponibles comme NASTRAN, ANSYS ou ABAQUS ne fournissent pas automatiquement de telles capacités et nécessitent le développement de subroutines et de fonctions définies par l'utilisateur. Comme on peut le voir sur la figure 1 des exemples concernant les domaines d'utilisation des FGM (revêtement thermique, écrans thermiques, carters de fusées, etc.), les éléments de coque et de plaque sont plus adaptables et préférables pour la modélisation de telles structures.

Une autre approche de modélisation par éléments finis par rapport à l'élément de coque ou de plaque est le développement d'éléments finis de poutre. Les théories des poutres décrivent la cinématique des sections d'un élément de poutre. Ces théories de poutres se regroupent sous les théories des poutres d'Euler-Bernoulli (EBBT Euler-Bernoulli Beam Theory), de Timoshenko (TBT : Timoshenko Beam Theory) et d'ordre supérieur (HOBT : High Order Beam Theory) dans la littérature. Le développement d'éléments finis de poutres par l'utilisation de diverses théories de poutres est principalement classé en deux, où le choix le plus largement adopté est l'utilisation de l'approche par déplacement et la méthode alternative est l'utilisation d'une approche de formulation en déformation. Dans le contexte des formulations basées sur le déplacement et des hypothèses de la théorie des poutres de Timoshenko pour des poutres prismatiques uniformes avec des matériaux homogènes, les éléments finis de poutre proposés par Friedman et Kosmatka (1993) et Reddy (1997) s'avèrent être un élément libre de tous blocage de cisaillement transversal et fournissent une matrice de raideur exacte sous une réponse élastique linéaire.

En termes de développement de poutres en FGM, le travail le plus ancien et le plus cité est l'élément fini de poutre proposé par Chakraborty et al. (2003) dans lequel ils ont développé un nouvel élément de poutre pour étudier les interactions thermoélastiques des poutres FGM. La génération des fonctions de forme, de rigidité et de la matrice de masse pour une poutre FGM est expliquée dans cet article de recherche. La matrice de rigidité est dépourvue de verrouillage (blocage) de cisaillement transversal puisque le degré des fonctions de forme du déplacement transversal est plus élevé que la fonction de forme de la pente comme cela est discuté par Reddy (1997). Il convient de signaler que l'étude de Chakraborty et al. (2003) est couramment cité dans

la littérature et elle est considérée comme une formulation de référence pour la modélisation des poutres en FGM.

Dans l'étude de Hemmatnezhad et al. (2013), l'analyse des vibrations libres de grande amplitude, imposant une grande déformation de type Von-Karman, de poutres avec des matériaux graduellement fonctionnels, est réalisée. La formulation d'éléments de poutre finie pour FGM, proposée par Chakraborty et al. (2003) est encore utilisé dans cette étude. Les résultats obtenus à partir des simulations numériques sont comparés aux solutions de la théorie d'élasticité disponibles dans la littérature. Outre le développement et l'utilisation d'éléments finis basé sur la formulation en déplacement, il est également possible de formuler des éléments finis basé sur la formulation en déformation ou la formulation mixte pour l'analyse des poutres en FGM.

Les éléments de poutre restent limités dans leurs applications aux structures unidimensionnelles, ce qui impose la formulation d'éléments de coque et de plaque qui sont plus adéquates pour la modélisation de structures bidimensionnelles.
A cet effet, Reddy et Chin en 1998 ont réalisé une étude sur le comportement mécanique et thermique des éléments de coque en FGM. Un élément fini de coque pour l'analyse des FGM est développé dans ce travail et des études paramétriques de l'effet de couplage thermomécanique sur les FGM sont également réalisées. Les paramètres sont sélectionnés en tant que rapports de distribution des matériaux et de leurs types.

Les comportements thermomécaniques des plaques en FGM ont été analysés par Reddy en 2000. Il a utilisé des éléments finis basés sur une formulation de grande taille de type Von-Karman. Les résultats obtenus indiquent que la réponse de base des plaques en FGM constituées de métal et de céramique ne se situe pas forcément entre le métal total et l'état complètement en céramiques. La déflexion non-dimensionnelle atteint un minimum à un indice de fraction volumique dépendant des propriétés des constituants et de leurs rapports.

3. Objectifs et portée de la thèse

Le premier effort du présent travail consiste au développement d'une fonction de de cisaillement permettant de déterminer les contraintes de cisaillement transversal en chaque point de la section d'une poutre en FGM. La fonction développée vérifie les conditions de contraintes nulles sur les faces supérieure et inférieur de la poutre et celle de la contrainte maximale sur l'axe neutre avec un changement de pente aux points d'inflexions. Les résultats obtenus avec cette fonction sont très satisfaisants.

La deuxième étendue de la présente recherche concerne la construction d'un élément fini de coque mince basé sur la formulation en déformation permettant la modélisation et la discrétisation même des structures à doubles courbure.

Le troisième effort de la présente recherche se concentre sur la généralisation de la formulation en déformation pour la modélisation des structures courbes en FGM par la construction d'un élément finis de coque dédié pour l'analyse des coques en FGM. Pour ce but des matrices de rigidité de membrane, de flexion et de couplage membrane-flexion sont développés afin de construire la matrice de rigidité de l'élément de coque en matériau FGM. L'élément a permis d'analyser quelques exemples test en FGM.

Par ailleurs, un autre objectif de ce travail est d'étudier l'influence des différents paramètres tels que la géométrie, les conditions aux limites, l'épaisseur (mince où épaisse), le paramètre du matériau utilisé sur les différents types de comportements des structures en FGM.

4. Organisation de la thèse

Dans le premier chapitre nous faisons une présentation très large sur les matériaux composites : les composites classiques (stratifiés) en premier lieu, en montrant leurs limitations et les problèmes ouverts qui leurs sont inhérents et les matériaux composites en FGM en deuxième lieu, en révélant la nécessité de leur modélisation d'une manière adéquate. Donc, une présentation générale des matériaux composites, de leurs mécanismes de rupture sont ultérieurement abordés en focalisant sur le phénomène de délaminage, puis nous donnons une description des Matériaux à Gradient Fonctionnel 'MGF', leur histoire d'évolution, leurs propriétés et leurs domaines d'utilisation.

Au chapitre deux, nous présentons les relations de la cinématique et de l'équilibre nécessaires pour le développement de l'élément de poutre avec cisaillement transversal dédié pour les matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Ainsi nous mentionnons quelques théories principales de poutres et les cinématiques de leur section. Ensuite, nous présentons une nouvelle fonction de cisaillement basé sur une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT : Higher Shear Deformation Theory) destinée à la modélisation des poutres avec cisaillement en matériau FGM. Un état d'analyse comparative sur la base d'une étude paramétrique des performances de

l'élément développé en tenant en compte de la nouvelle fonction de cisaillement par rapport à ceux développés par d'autres auteurs est exposée à la fin du chapitre.

Le troisième chapitre est réservé à la formulation et au développement de l'élément de coque mince triangulaire à facette plane à trois nœuds et à six degré de liberté par nœud basé sur le modèle en déformation pour le cas d'un matériau isotrope. La matrice de rigidité membranaire est celle de l'élément triangulaire de membrane à trois nœuds et à trois degré de liberté par nœud développé sous la formulation en déformation et basé sur les équations d'équilibre. La matrice de rigidité flexionnelle est celle de l'élément de plaque mince triangulaire à trois nœuds et à trois degré de liberté par nœuds développé sur la base du modèle en déformation. Une validation très riche est effectuée sur la base de tests de référence (Benchmark) pour les éléments finis de plaques et coques.

Au quatrième chapitre nous généralisons l'application de l'élément formulé au chapitre trois pour qu'il soit capable de modéliser des coques en matériau FGM et cela par un développement complémentaire. En plus de l'adaptation des deux éléments de membrane et de flexion développés au chapitre trois pour les matériaux FGM, une matrice de rigidité de couplage membrane-flexion est indispensable dans le cas des FGM et cela suite à la non confusion du plan médian et du plan neutre de rigidité.

Finalement, notre thèse s'achève par une conclusion générale mettant en valeur les résultats obtenus et dégageant des perspectives pour des travaux futurs.

5. Bibliographie

Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., & Reddy, J. N. (2003). A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. International Journal of Mechanical Sciences, 45(3), 519-539.

Friedman, Z., & Kosmatka, J. B. (1993). An improved two-node Timoshenko beam finite element. Computers & structures, 47(3), 473-481.

Hemmatnezhad, M., Ansari, R., & Rahimi, G. H. (2013). Large-amplitude free vibrations of functionally graded beams by means of a finite element formulation. Applied Mathematical Modelling, 37(18-19), 8495-8504.

Jha, D. K., Kant, T., & Singh, R. K. (2013). A critical review of recent research on functionally graded plates. Composite Structures, 96, 833-849.

Kieback, B., Neubrand, A., & Riedel, H. (2003). Processing techniques for functionally graded materials. Materials Science and Engineering: A, 362(1-2), 81-106.
Reddy, J. N. (1997). On locking free shear deformable beam finite elements. Computer methods in applied mechanics and engineering, 149(1-4), 113-132.
Reddy, J. N., & Chin, C. D. (1998). Thermo mechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. Journal of thermal Stresses, 21(6), 593-626.
Reddy, J. N. (2000). Analysis of functionally graded plates. International Journal for numerical methods in engineering, 47(1-3), 663-684.

Chapitre 1

Etude bibliographique sur les matériaux composites

SOMMAIRE

Chapitre 1 : Etude bibliographique sur les matériaux composites

Suite à la production originale d'un matériau composite moderne baptisé : matériau à gradient fonctionnel; ce chapitre est consacré à présenter l'aplomb du problème. Une introduction générale sur le matériau composite et le rôle des différentes matériaux le composant (matrice, renfort, charge, interface,…) seront étudiés en mettant le point sur leurs avantages et leurs inconvénients. Les mécanismes de rupture des composites unidirectionnels seront ensuite abordés en insistant sur le phénomène de délaminage observé dans les composites multicouches. Ensuite, un historique détaillé du développement et de la mise en œuvre des matériaux à gradient fonctionnel est donné. Enfin, un résumé des travaux sur les méthodes de caractérisation et les méthodes d'obtention des propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel est présenté.

1.1. Les matériaux composites classiques

Les matériaux composites ont été utilisés par l'homme depuis sa présence sur terre. Ils ne sont pas une innovation ; ils ont été utilisés dès l'antiquité par l'homme ; bois et torchis sont des matériaux composites de la vie habituelle. Les matériaux composites sont aussi utilisés pour optimiser les exploits de certaines armes ; tel que : les arcs tatars, pour lesquels les parties comprimées sont en corne et les parties tendus en bois collés où en tendons de bœuf. Les épées de Damas et les poignards Japonais dont la lame est en acier où en fer doux : la portion en acier est empilée comme une pâte feuilletée, menant les impuretés et les rétrécissements selon le sens longitudinal puis façonnée en U dans lequel est placé le fer doux. Dans ce cas, le sabre résiste alors à la flexion et aux chocs. Nous voyons subséquemment prendre forme, à cette ère, la subdivision des produits composites à grande diffusion et des pièces composites à hautes performances. Au sens large, le mot "Matériau composite" signifie " un matériau constitué de deux ou plusieurs parts différentes". Il est le résultat de l'assemblage de deux matériaux de natures distinctes, se complétant afin d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Dans le cadre du présent travail, la nomination "matériau composite" ou "composite" est : un matériau composite constitué d'une phase discontinue, de renfort, rigide et résistante par rapport à la phase continue de la matrice. De ce fait, ses propriétés mécaniques découlent essentiellement de la nature des constituants et leurs propriétés, de la géométrie du renfort (forme, élancement) et de sa distribution (répartition, orientation), en conséquence de sa concentration (taux volumique ou massique).

1.1.1. Classement des matériaux composites

Nous pouvons classer les matériaux composites selon de nombreuses manières. Selon la nature de la matrice, les matériaux composites se classent en trois catégories :

Composites à matrice polymérique : ils ont été développé particulièrement pour les applications aéronautiques où la réduction de la masse est fondamentale. Les polymères sont donc caractérisés par une faible densité, une résistance mécanique corrélativement faible et une importante déformation à la rupture.

Composites à matrice métallique : La matrice pour ces cas est métallique (aluminium ou titane), elle est renforcée par des renforts couramment non-métalliques, fréquemment des céramiques. Cette gamme de composite a des propriétés mécaniques meilleures ou plus adaptables au chargement que ceux à matrices polymériques. Leurs domaine d'application est la fabrication des moteurs d'automobile.

Composites à matrice céramique : Pour ce type de composite la matrice est de type céramique telle que le verre et le carbure de silicium. La matrice est associée à des renforts tels que les métaux et le carbone. Le but essentiel du développement de ces matériaux composites est d'améliorer les propriétés mécaniques telles que la ténacité et la résistance au choc thermique.

Une autre manière de catégorisation des matériaux composites se base sur le type de renfort figure 1.1. Dans ce cas naissent les quatre catégories suivantes :

Composites fibreux : Les fibres de différents types et de différentes origines constituent des renforts pour ce type de composites. La longueur des fibres varie selon l'application visée en fibres continus ayant la longueur de la pièce et en fibre courte de petite longueur.

Composites stratifiés : Ils sont constitués d'au moins de deux couches pouvant être composées de différents matériaux similaires semblablement dans les métaux plaqués ou de même matériau composite empilé suivant différentes orientations comme pour des composites stratifiés à renforts de fibres longues. Ce dernier est une classe mixte de composite, comportant à la fois le composite à renfort fibreux et la technique de stratification.

Composites à renforts de particules : Le renfort est dit de particule si toutes les dimensions du renfort sont petites devant les autres dimensions du matériau et approximativement égales. Les particules dures sont éparpillées aléatoirement dans la matrice qui est moins rigide.

Composites à renforts de paillettes : Les dimensions des paillettes sont très faible par rapport aux autres dimensions. L'éparpillement de ces "particules minces" est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes peuvent être ajustées parallèlement dans le but d'avoir des propriétés dans le plan plus homogènes.

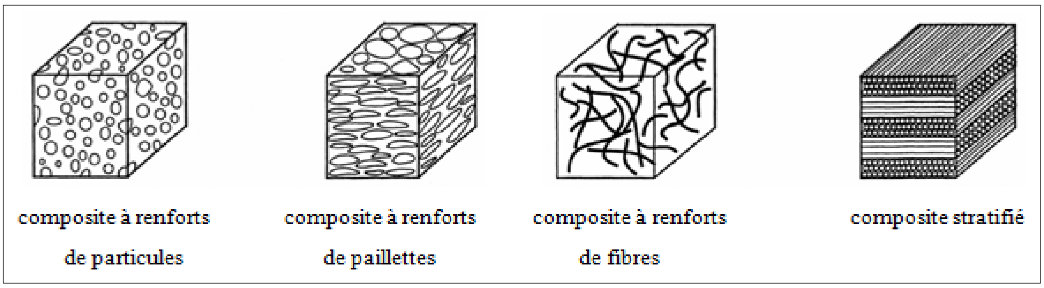


Figure 1.1 Classification des matériaux composites en fonction du type de renfort

1.1.2. Constitution des matériaux composites

Généralement un matériau composite est constitué de matrice et de renfort. Si le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont absolument liés sans y avoir ni glissement ni séparation entre eux. Les renforts sont sous forme de fibres continues ou discontinues, particules où paillettes. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique pour prendre les efforts extérieurs. La matrice assure la fonction de cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques, tandis que l'arrangement des fibres et leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure. Les propriétés mécaniques à l'interface entre fibres et matrice sont de grandes importances dans l'exécution d'un composite. Pour obtenir de bonnes caractéristiques mécaniques, il ne doit y avoir ni glissement ni séparation entre les différents constituants du composite.

1.1.2.1. Les matrices

Dans la majorité des cas, la matrice composant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymériques existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'application. Lorsqu'une tenue de la structure aux très hautes températures est indispensable, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont

préférables. Une classification, des types de matrices, couramment rencontrées dans la littérature se présente comme suit :

Résines thermodurcissables

Ces résines sont les plus utilisées de toutes les matrices, pour des applications commerciales, industrielles et de transport. Elles ont une excellente adhésion avec les différents fibres et particulièrement ceux en verre.

Résines thermoplastiques

Si la résine thermodurcissable est soumise à des températures élevées, il se génère des relations chimiques au cours desquelles des liaisons covalentes sont formées entre les chaînes des molécules résultantes. Le polymère final se présente sous la forme d'un corps solide infusible. La polymérisation est irréversible, c'est à dire que le matériau ne peut être mis en forme qu'une seule fois, au moment de sa fabrication.

1.1.2.2. Les fibres

La rupture dans les matériaux à haute résistance ou à haut module d'élasticité est fréquemment provoquée par la propagation de fissures. Les matériaux fibreux sont fondamentalement plus résistants à la rupture que ceux en forme massive, puisque la taille des défauts est initialement limitée par le diamètre faible. Pour un composite fibreux, la tenue mécanique est assurée particulièrement par les fibres. Suite à sa nature filamenteuse, la rupture de quelques fibres a pour résultat le transfert du chargement sur les autres fibres, ce qui prévient la rupture catastrophique de la structure. Les fibres les plus souvent rencontrées dans les composites sont les suivantes :

Les fibres de verre : Les fibres de verre sont très répandues dans les applications à basse où à haute performance telles que les réservoirs de propulseurs de fusée. Leurs avantages impliquent un prix compétitif, une disponibilité et une résistance élevée. Néanmoins, à cause de leur rigidité corrélativement faible, les fibres de verre sont progressivement remplacées par des fibres d'aramide ou des fibres de carbone dans les applications de haute performance.

Les fibres de carbone : Maintenant, les fibres de carbone sont les plus répandues pour les matériaux composites à hautes performances. Deux avantages principaux jouent en faveur de ces fibres : leur fabrication plus adaptée à la production à grande échelle que d'autres fibres à hautes performances et leurs excellentes propriétés mécaniques plus

facilement transférables aux matériaux composites. Leur prix reste toutefois excessif pour les produits à grand public.

Les fibres d'aramides : Ces fibres appartiennent à la catégorie des fibres polyamides aromatiques. Elles possèdent une résistance élevée et une rigidité amplement supérieure à celle des fibres de verre. Leur latitude aux dommages est également très bonne. Leur désavantage principal est leur résistance en compression inférieure à celle des fibres de carbone et une cohésion relativement faible aux matrices.

1.1.3 Réflexions sur l'usage des matériaux composites

Dans la conception des produits finaux en matériaux composites, il est indispensable d'évaluer et de comparer les composites en matériaux conventionnels pour bien adopter les matériaux à utiliser. Les avantages et les inconvénients principaux des matériaux composites sont présentés ci-dessous.

1.1.3.1. Avantages des matériaux composites

Les avantages les plus cités des matériaux composites sont :

- **Adaptation de leurs propriétés mécaniques**

Afin d'obtenir un composite capable de résister à diverses sollicitations, il faut alors associer différentes orientations de fibres. Un stratifié est un empilement de plis élémentaires se comportant ensemble comme un élément structural. Un pli élémentaire est anisotrope, ou orthotrope dans la majorité des cas, avec une résistance et une rigidité dans la direction des fibres beaucoup plus élevées que dans l'autre direction. L'avantage capital du stratifié composite est que les plis élémentaires peuvent être orientés de telle façon que la résistance dans une direction donnée concorde avec les chargements prévus.

- **Haut module d'élasticité et haute résistance mécanique**

Les propriétés mécaniques élevées, surtout la résistance et la rigidité des matériaux composites à hautes performances, permettent de répondre aux exigences de l'industrie. D'autres industries en profitent également, par exemple la vitesse d'une balle de tennis est plus élevée avec des raquettes en carbone/époxy.

- **La légèreté**

Les matériaux composites à haute performance ont une densité de l'ordre de 1,6, en revanche celle des alliages d'aluminium est de 2,7. Ils autorisent donc un gain de 10 à 30% sur les éléments de structure. Ce bénéfice de masse permet d'employer des moteurs moins puissants, qui consomment moins et permettent de réduire la taille des réservoirs de

combustible pour le même cahier des charges de l'avion. Il permet aussi des rayons d'action plus grands.

- **Facilité de Production**

Les matériaux composites permettent la simplification de l'assemblage dans les structures, ceci corrige relativement leur prix élevé. La diminution du nombre de pièces par rapport aux matériaux ordinaires peut être consistante.

- **Facilité de Maintenance**

Les composites nécessitent moins d'entretien que les alliages métalliques. D'une part, ils ne sont pas sensibles à la corrosion et d'autre part leur tenue en fatigue est très bonne.

1.1.3.2. Les inconvénients des matériaux composites

Les matériaux composites ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications malgré leurs avantages impressionnants. Des inconvénients et/ou des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les inconvénients les plus usuels sont :

Prix de revient élevé (Coût élevé)

Les matériaux composites ont été développés particulièrement pour répondre aux besoins de l'industrie aérospatiale qui est très exigeante vis-à-vis de la sécurité et de la technologie utilisée, ce qui rend lent l'élargissement de l'utilisation des composites aux produits plus populaires (de grande consommation) à cause de leur coût élevé.

Conception et analyse sophistiquées

A la différence des matériaux classiques, profondément étudiés, les matériaux composites sont fréquemment à la fois hétérogènes et anisotropes ; rendant ainsi difficile leur conception et leur analyse. C'est pourquoi, ils nécessitent de nouvelles approches de conception, d'étude et d'analyse, généralement plus approfondies et plus sophistiquées. L'hétérogénéité exige l'analyse de ces matériaux de deux points de vue, la première macroscopique et la deuxième microscopique : la macro-mécanique et la micromécanique. De même, les matériaux anisotropes requièrent plus de propriétés mécaniques que les matériaux isotropes pour établir les relations contraintes-déformations. Dans le cas des composites stratifiés, la rupture se produit de plusieurs façons différentes. Il est donc difficile de mettre une théorie de résistance tenant compte de tous les modes de rupture et de leurs interactions. Par conséquent, la détermination des résistances est plus complexe nécessitant ainsi des vérifications expérimentales souvent onéreuses. De plus, la résistance d'un stratifié

peut être influencée par les contraintes de cisaillement transversal entre les couches (inter-laminaires) au voisinage des bords libres (problème de délaminage).

- **Fragilité et Faiblesse des Assemblages**

L'assemblage des pièces en matériaux composites pose toujours des problèmes de faible résistance, à cause de la concentration des contraintes, et cela vu que les matériaux composites sont plus fragiles que les matériaux métalliques. Par conséquent, Les assemblages sont souvent renforcés par des inserts métalliques ou par l'augmentation de l'épaisseur du composite au droit des singularités entrainant ainsi une masse supplémentaire sur la structure.

- **Latitude aux dommages**

Un des points faibles les plus sérieux des matériaux composites est la latitude aux dommages. Des dommages inévitables de natures diverses peuvent être engendré durant la vie d'une structure soit en service ou pendant la maintenance. D’une manière générale, plus un matériau est ductile, plus il est capable de tolérer un dommage, vu que la ductilité a une capacité d'absorber de l'énergie. Par conséquent, sous un choc, les structures métalliques ont une aptitude de se déformer plutôt que de se briser. Le caractère fragile des matériaux composites n’admet pas, en revanche, de subir un choc sans subir de dommages. Les atteintes sont souvent des fissurations internes de la matrice, indétectables sur la surface de la structure. Ce type de dommages sur la matrice réduit amplement la résistance en compression des pièces endommagées. Les atteintes des fibres diminuent la résistance en compression et en traction du composite. Un programme d’inspection (analyse de la résistance résiduelle et analyse de la propagation des dommages) est nécessaire pour évaluer la tolérance aux dommages des structures en matériaux composites.

1.1.4. Les mécanismes de rupture dans les composites

Le matériau composite à renforts de fibres longues est très coutumier dans les applications où la réduction de masse est cruciale. Plus l'utilisation d’un matériau est élargie, plus la probabilité de rupture éventuelle est élevée. La capacité à déterminer le type des ruptures, par exemple en termes d’identification des modes de rupture, des paramètres caractéristiques, ou des valeurs critiques à la rupture, est indispensable pour assurer l'intégrité des pièces en service et pour la conception des futurs produits.

1.1.4.1. Modes de rupture dans les composites unidirectionnels

La rupture dans les composites stratifiés se produit de différentes façons très complexes. Les modes de rupture découlent de la stratification et de la direction du chargement par rapport à l'orientation des fibres.

Les figures 1.2 et 1.3 présentent les allures des ruptures par flexion et par traction respectivement.

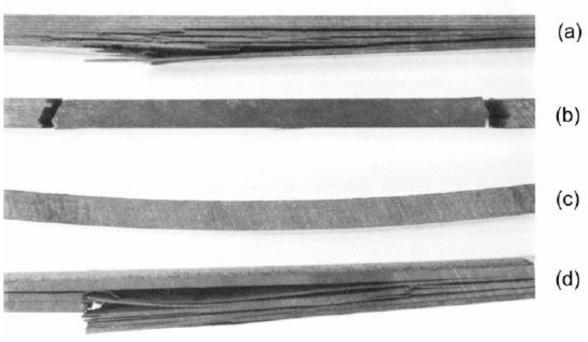


Figure 1.2 Rupture par flexion de différentes séquences d'empilements (Quasi-isotrope)

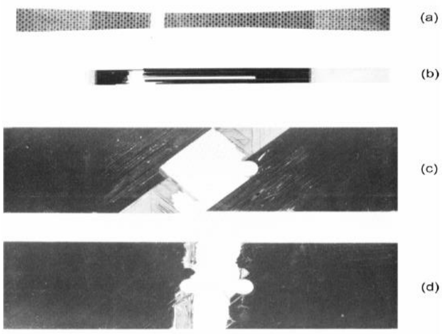


Figure 1.3 Ruptures par traction de différentes séquences d'empilement (0°-90°)

La description de la rupture à l'échelle du pli sert au classement des mécanismes de rupture. Les stratifiés à renforts de fibres longues montrent trois types de rupture : rupture intra-laminaire, rupture inter-laminaire et rupture translaminaire. Ces trois modes de rupture sont présentés à la figure 1.4. Elles définissent le plan de rupture par rapport aux composants du matériau. La rupture intra-laminaire se manifeste à l'intérieur d'un pli tandis que la rupture inter-laminaire est une rupture entre deux plis contigus. La rupture translaminaire a une orientation transversalement à l'orientation des fibres pour le pli endommagé.

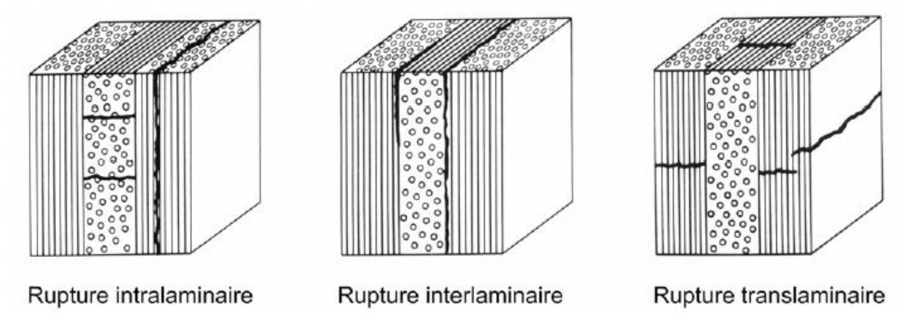


Figure 1.4 Les trois modes de rupture dans un stratifié 0°/90°/0° (Smith 1993).

- **La rupture intra-laminaire** : Elle est due particulièrement à la faible résistance de la matrice et/ou de l'adhérence entre la matrice et les fibres. Elle est provoquée par les contraintes se trouvant dans le plan du stratifié. Un pli se dégrade par la résultante de la contrainte de traction dans la direction normale aux fibres. Ce type de rupture est connu sous l'appellation de "fissure transverse". Dans la majorité des cas, ce type de fissure de la matrice se manifeste avant la rupture des fibres.

- **La rupture inter-laminaire** se manifeste à l'interface entre deux plis d'un empilement. Ce type de rupture se caractérise par la rupture de la matrice et la décohésion fibre/matrice. Ce mécanisme de rupture inter laminaire contient peu de rupture de fibres. De même que pour le cas des matériaux métalliques, la rupture inter laminaire se produit selon des modes distincts connus en mécanique de la rupture ; à savoir le mode I (ouverture), le mode II (cisaillement), le mode III (cisaillement anti-plan) ou une combinaison des trois modes.

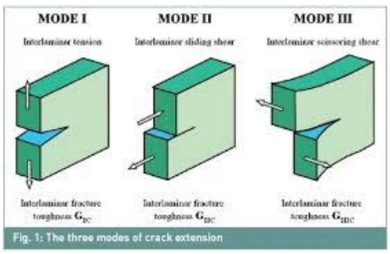


Figure 1.5 Les trois modes principaux de rupture dans les composites

- **La rupture translaminaire** : concerne la rupture de fibres. Les surfaces de rupture sont donc généralement marquées par la morphologie rugueuse des bouts de fibres. En effet, la contrainte de rupture des fibres est plus importante que celle de tous les autres constituants d'un composite stratifié. Par conséquent, ce mécanisme de rupture entraîne souvent la rupture totale du stratifié. La rupture translaminaire peut être séparée en deux

modes selon les chargements : la rupture en traction et le micro-flambage en compression. La rupture peut être provoquée par un mode individuel ou une combinaison de deux modes.

1.1.4.2. Risque du phénomène de délaminage

L'un des avantages essentiels des composites stratifiés à renforts de fibres longues est l'aptitude d'orienter les fibres de chacun des plis afin d'obtenir des propriétés, souvent la résistance et la rigidité, adaptées aux chargements dans les directions attendues. Malgré les excellentes propriétés dans le plan, les composites stratifiés présentent un problème propre aux matériaux réalisés par empilement (stratification) ; il s'agît de la rupture inter-laminaire. Ce mécanisme de rupture connu sous l'appellation de "délaminage" se caractérise par un décollement et/ou une décohésion entre les couches du stratifié. Un stratifié sollicité par un chargement présente différents taux de dégradations. Dans le schéma d'évolution des défauts les plus "classiques", la matrice et l'interface fibre/matrice sont les premières à s'abîmer (Figure 1.6-a). Les premières anomalies sont en conséquence la microfissuration de la matrice et la décohésion fibre/matrice à l'échelle microscopique. Puis, ces défauts s'accroissent de manière permanente à l'échelle du pli par coalescence (Figure 1.6-b), les micros dégradations s'accumulent pour constituer des fissurations transverses apparentes. Ces derniers (les fissures transverses) peuvent arriver à l'interface du pli et provoque le délaminage sous l'effet des contraintes inter-laminaires (Figure 1.6-c). Généralement, le délaminage et son évolution dépendent du nombre de plis, de leur empilement et du chargement.

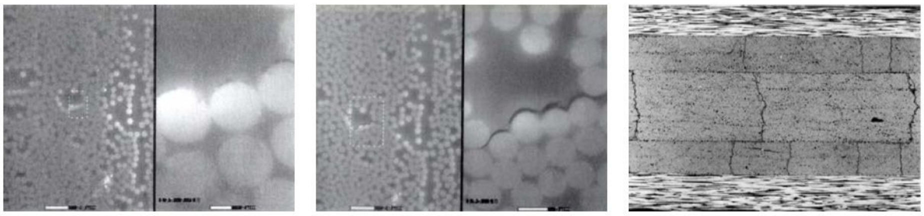

(a) Micro-défauts (b) Coalescence (c) Fissuration transverse

Figure 1.6 Développement et Évolution des défauts

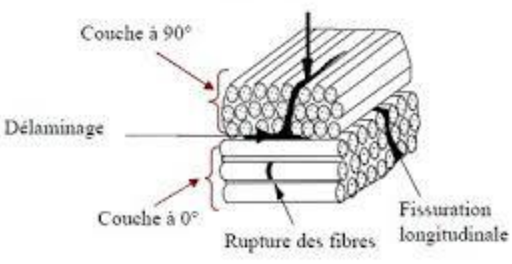


Figure 1.7 Le délaminage dans un composite

Les principaux micro-mécanismes d'endommagement accompagnant un délaminage se présentent schématiquement comme dans la Figure 1.8. Ils contiennent :

- **Une zone endommagée :** La forte concentration de contraintes tout autour de la pointe de fissure fait naitre une zone de dommage où se trouve la déformation plastique et/ou des microfissures dans la matrice.
- **Une fissure latérale :** Les microfissures dans la zone endommagée peuvent se transformer en des fissures frontales dans la matrice aux alentours du plan de délaminage.
- **Le pontage de fibres :** L'existence de fissures en dessous et/ou au-dessus du plan de délaminage facilite la création de passerelles de fibres reliant les deux surfaces délaminées. Notons que certains ponts de fibres se rompent pendant l'avancée du délaminage.

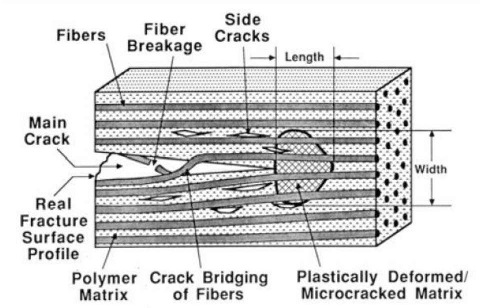


Figure 1.8 Les mécanismes d'endommagement accompagnant le délaminage

1.2. Les matériaux à gradient fonctionnel «FGM»

Pendant un certain temps l'industrie aéronautique, navale et autres applications d'ingénierie ont utilisé des matériaux composites légers avec un rapport élevé de résistance-poids. La figure 1.9 représente les différentes catégories de matériaux en fonction de leurs densités ρ et de leurs modules d'élasticité (module de Young) E. Cependant, le matériau composite traditionnel (classique) est inapte d'être employé dans des environnements à haute température. Tandis que les matériaux métalliques ont été utilisés dans le domaine industriel durant de nombreuses années en raison de leur bonne résistance et de leur ténacité. De même que pour un matériau composite, à température élevé, la résistance du métal se réduit pareillement à un matériau composite traditionnel (classique). Contrairement aux métaux et aux matériaux composites classique, les matériaux céramiques ont d'excellentes caractéristiques de résistance à la chaleur (haute température). Cependant, l'utilisation des céramiques est souvent limitée en raison de leur faible résistance : mécanique et au choc.

Récemment, une classe originale de matériaux composites nommée : Matériaux à Gradient Fonctionnel (MGF) (FGM en langue anglaise) a suscité une réflexion considérable

des chercheurs dans le domaine des composites. Un matériau composite de type MGF est un composite non homogène fabriqué à partir de différents composants de matériaux (généralement du céramique et métal), avec un effet considérable de couplage membrane-flexion du point de vue comportement mécanique. La figure 1.10 illustre un exemple de ce type de matériau tiré de Yin 2004. Elle montre l'intégration de particules de différentes formes (généralement sphérique) dans une matrice isotrope.

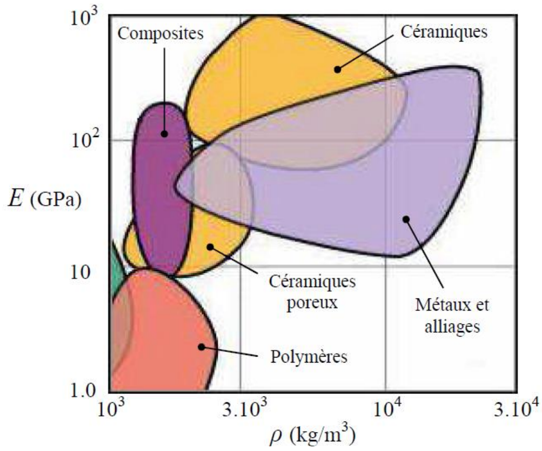


Figure 1.9 Classification des matériaux en fonction de leurs densités ρ et de leurs modules de Young E (Ashby 2005)

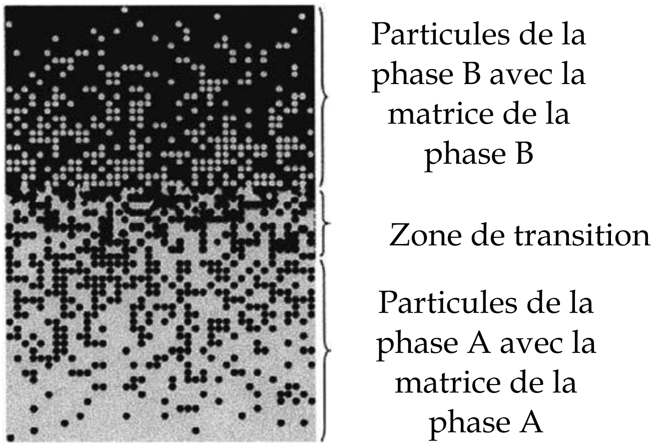


Figure 1.10 Matériau à gradient fonctionnel (Yin 2004)

Une micrographie par microscope à balayage électronique d'une section transversale d'un matériau FGM est présentée sur la figure 1.11.

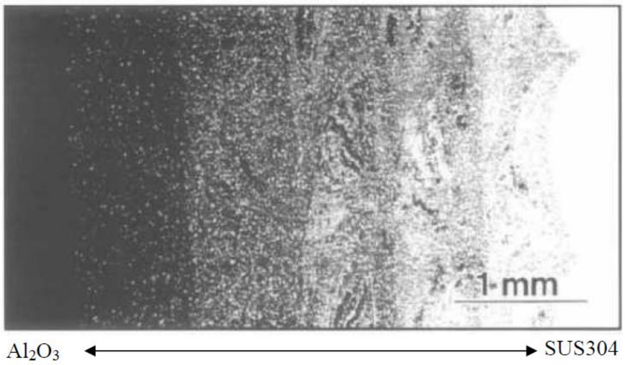


Figure 1.11 Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'un fonctionnel (Al_2O_3-SUS304).

Pour un matériau à gradient fonctionnel (FGM) les différentes phases micro-structurelles ont des fonctions différentes. Le matériau à gradient fonctionnel absolu atteint l'état multi structural par échelonnement de leurs propriétés. En variant graduellement la fraction volumique des constituants du matériau, leurs propriétés matérielles montrent un passage lisse et continu d'une surface à l'autre, éliminant ainsi les problèmes d'interface (inter-laminaire) et l'atténuation des concentrations de contraintes thermiques. Cela du fait que le constituant céramique du matériau à gradient fonctionnel est capable de résister à des hautes températures, tandis que le constituant métallique garantis une meilleure performance mécanique et réduit la potentialité de la rupture brutale catastrophique. Donc, en utilisant les FGM, on anticipe que les propriétés du composé vont être améliorées et de nouvelles fonctionnalités vont voir le jour. Les premiers matériaux à gradient fonctionnel ont été réalisés par des chercheurs Japonais au milieu des années quatre-vingt (Yamanoushi 1990 et Koizumi 1993). Depuis, des efforts considérables ont été fourni pour développer des matériaux à haute résistance basés sur les matériaux à gradient fonctionnel. Ces produits ont servie initialement comme des barrières thermiques pour les structures aérospatiales et les réacteurs de fusion ; Hirai and Chen 1999, Chan 2001 et Uemura 2003. Actuellement, on les utilise pour un usage général en tant que composants structuraux dans un environnement de haute température. Les applications éventuelles des matériaux à gradient fonctionnel sont variées et nombreuses Müller 2003, Qiu et al. 2003, Liu 2003, Watari et al. 2004 et Paszkiewicz et al. 2008.

Plusieurs articles dans des revues de recherche traitant divers aspects sur les FGM ont été publiés au cours des dernières années (Fuchiyama 1995, Markworth 1995, Tanigawa 1995, Noda 1999 et Paulino 2003). Ils affirment que la plupart des recherches sur les FGM avaient davantage porté sur l'analyse des contraintes thermiques et mécaniques de la rupture.

Une étude complète menée en flexion, flambage et l'analyse des vibrations des plaques et coques en FGM a été présentée par Shen 2004. En 2007, Birman et Byrd ont fait une synthèse de recherche bibliographique sur les principales évolutions en FGM incluant le transfert de chaleur, contrainte, stabilité et analyses dynamiques, expérimentation, fabrication et conception ainsi que les applications et rupture.

1.2.1 Notions sur le gradient des FGM

À l'inverse aux matériaux homogènes, les propriétés des FGM changent non seulement en fonction de leur composition mais également en fonction de la connectivité du réseau interne de la structure. Sur la figure 1.12, nous montrons une représentation schématique de la microstructure d'un matériau FGM suite à l'augmentation du contenu de la deuxième phase. Pour des fractions faibles, la deuxième phase existe sous forme de grains isolés éparpillées dans une matrice (a). Quand le contenu de la deuxième phase accroit, les particules débutent à être en contact et à former des tas agglomérés (b).

Si l'augmentation de la phase deux continue, une transition microstructurale critique aura lieu, dans ce cas la deuxième phase n'est plus éparpillée, mais elle devient plutôt reliée entre elles sur des volumes importants (c, d, e). Cette phase de transition a un effet important sur l'évolution des propriétés du matériau FGM final. Nous remarquons qu'une petite transformation de la composition du FGM va se traduire par une variation distincte des propriétés telle que la conductivité thermique ou électrique (Morinaga 1993).

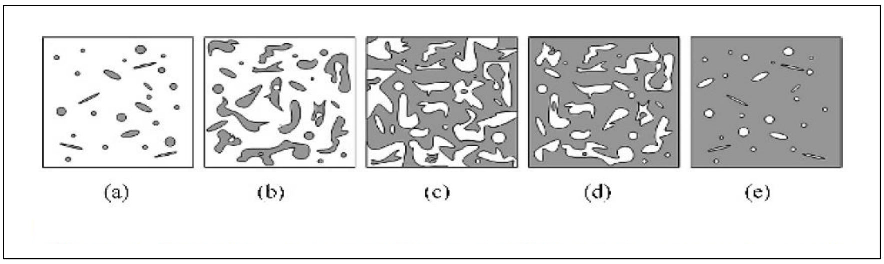


Figure 1.12 Changement de la microstructure d'un FGM

Les FGM se caractérisent par les trois types de gradients suivants :

Le Gradient de la porosité (Taille et pourcentage des pores)

Le gradient de la porosité s'obtient soit par le dépôt du mélange des poudres à différentes formes des particules ou par variation des paramètres de dépôt en utilisant des détenteurs d'espace. La taille des pores (vides) se crée en général en variant la taille des particules. Les différents comportements au frittage des poudres peuvent être utilisés pour produire un gradient de porosité.

Le Gradient de composition chimique d'un matériau monophasé

Le dépôt des poudres avec un changement continu de la composition de la mixtion durant le frittage entraine la naissance d'une matière à phase unique avec un changement flexible de la répartition.

Les gradients de la teneur en volume des phases et les gradients de taille de grain (Matériaux multiphasique)

La majorité de la bibliographie se centralise sur le gradient en volume des contenants des distinctes phases. La microstructure résultante du FGM est constituée de deux ou plusieurs phases avec des gradients en volume des constituants. La combinaison des phases peut admettre des systèmes : métal-métal, métal-céramique et céramique-céramique.

1.2.2 Les méthodes de caractérisation des FGM

À l'égard de la généralisation des applications progressivement croissantes des FGM, il est nécessaire de trouver une méthode adéquate et fiable pour quantifier et mesurer les propriétés physique et mécanique des matériaux FGM en utilisant des essais non destructifs. Il est donc important de développer et d'avoir une technique fiable et efficace de détermination des propriétés des différents matériaux entrants dans la conception des FGM et il est particulièrement important d'avoir une technique pour évaluer les FGM après leur fabrication et leur mise en service. Ceci nous permet de vérifier si la propriété réelle du matériau concorde à l'exigence de conception pour satisfaire la sécurité et la qualité. En revanche la microstructure d'un produit FGM varie dans l'espace, par conséquent, la ténacité et la résistance d'un FGM ne peuvent être quantifiées naturellement par les tests classiques de la mécanique et la mécanique de la rupture ordinaire. Afin de déterminer le module d'élasticité (module de Young) de l'assortiment d'un FGM, habituellement à partir de la courbe contrainte-déformation, une jauge de déformation peut être fixée à la surface de l'échantillon au cours d'un essai de flexion à quatre points. La corrélation du module de Young de la combinaison d'un FGM s'estime en mesurant les fréquences de résonance de flexion d'une éprouvette rectangulaire à l'aide de la technique de la résonance forcée. Cette dernière, la résonance forcée, s'articule sur l'utilisation des champs d'ondes élastiques dans les structures et les procédures de calcul inverse qui sont encourageante pour la caractérisation des FGM ; puisque aujourd'hui des solveurs puissants sont à la portée des chercheurs pour l'analyse des ondes élastiques se propageant dans des milieux élastique telle que les FGM.

1.2.3. Design, optimisation et conception inverse des FGM

La conception d'un FGM est basée généralement sur les conditions de leur service. De ce fait, des efforts importants sont nécessaires pour sélectionner une combinaison de matériaux optimale dans le but d'alléger une contrainte (thermique par exemple) où une distribution optimale inter-matériau de la composition convenant aux conditions de production. Généralement, le concepteur est confronté à concevoir un système pour une performance optimale donnée sous certaines conditions d'usage et de contraintes d'utilisation et davantage, il a un éventail de choix du matériau à utiliser. Dans le cas des composites stratifiés fibreux, il a l'opportunité additionnelle d'orientation des fibres d'un

stratifié en fonction des exigences de conception. À l'égard de l'apparition des FGM, il peut aller encore loin en utilisant la notion de la conception où analyse inverse.

1.2.4. Les propriétés graduelles des FGM

Les variations graduelles des propriétés, d'un matériau FGM dans l'espace, comme elles ont été évoquées jusqu'à présent, sont initialement représentées par des polynômes, des fonctions exponentielles etc. En 1991, Fakui a étudié les effets de la fraction volumique de la poudre et de la force centrifuge sur le profil ayant une fonction de distribution polynomiale de degré trois (cubique). Puis, en 1993, Jin et Noda utilisent une variation exponentielle du profil de la distribution et déterminent quelques paramètres en liaison avec la fonction exponentielle employée. Dans la même année (1993), Matsuzaki et al. ont optimisé numériquement l'épaisseur et la distribution de composition d'un FGM vis-à-vis du transfert thermique dans des systèmes de réfrigération. De même, en 1993, Williamson d'une part et Drake d'autre part ont analysé les caractéristiques d'une microstructure en considérant les contraintes résiduelles.

1.2.5 Relations constitutives et modélisation du gradient

Généralement, deux façons de modéliser la graduation des propriétés de matériau dans les solides sont à considérer :

(i) L'approche macroscopique, elle suppose un profil de variation des fractions volumiques
(ii) L'approche micromécanique pour l'étude des milieux non homogène.

Pour la première approche (macroscopique), des fonctions polynomiales de différents degrés sont utilisées. Mais à l'échelle microstructural, le matériau à gradient fonctionnel se distingue par une transition à partir d'une phase dispersée à une autre phase à réseau inclusivement. Il est à noter que durant la dernière décennie, la micromécanique des milieux aléatoires inhomogènes a fait l'objet de plusieurs études intensives. Toutefois, des études semblables, ont principalement tenu sur des inclusions ou l'inhomogénéité de différentes formes du substrat homogène (homogénéité statistique) est considérée.

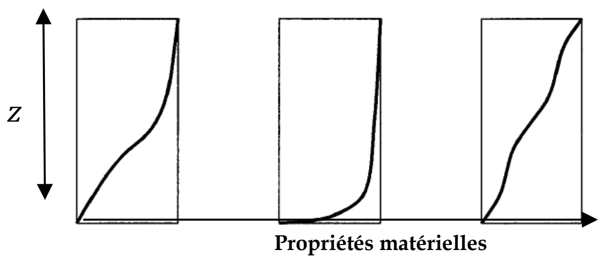


Figure 1.13 Illustration des propriétés matérielles des profils.

1.2.6 Domaines d'applications des FGM

Les FGM se caractérisent par un large domaine d'application. Sur le tableau 1.1 nous présentons les variétés des domaines d'applications réelles et éventuelles des FGM dans : les outils de coupe, les systèmes de transport, l'optique, pièces de machines, semi-conducteurs,

et le biosystème. Les applications éventuelles abritent tous les cas pour lesquels une combinaison de fonctions incompatibles est indispensable.

Tableau 1.1 Les divers domaines d'applications des FGM.

Conversion d'énergie	Générateur thermoélectrique, pile à combustible, une cellule solaire
Matériaux de construction	Blocs en béton résistant au feu, rayonnement, absorbant de l'humidité, milieux agressive.
Ingénierie	Outil coupant, les arbres, rouleau, lame de turbine, Matériaux de Construction
Énergie Nucléaire	Composants de réacteurs nucléaires, première paroi de du réacteur fusion
Aéronautiques Aérospatiale	Composants de véhicules spatiaux, corps d'avion spatial
Biomatériaux	Implant, peau artificielle, le système de délivrance de médicaments
Usines de produits chimiques	Échangeur de chaleur, cuve de réaction
optique	Fibres optiques, lentilles
Électronique	Semi-conducteur de bande graduée, capteur
Produits de base	Articles de sport, carrosseries, vitres

1.2.7 Les propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel

La plus part des FGM sont fabriqués à partir de deux phases (types) de matériaux ayant des propriétés distinctes. Un aperçu détaillé d'une microstructure échelonnée tangible est ordinairement non disponible, sauf éventuellement pour des renseignements sur la partition et la distribution de la fraction volumique. Comme la fraction volumique de chaque phase change et évolue graduellement suivant l'orientation de la progression, les propriétés effectives des FGM changent tout le long de cette direction. A cet effet, il existe deux approches pour construire des modèles types de matériaux à gradient fonctionnel. La première, consiste à prendre une variation par morceaux (variation en escalier) de la fraction volumique que ce soit de la céramique et/ou du métal. Dans ce cas le FGM garde la même fraction volumique pour chacune des régions (des couches quasi-cohérentes de métal-céramique Figure 1.14). La deuxième démarche, sert à prendre une variation continue de la

fraction volumique des deux composants, l'une à l'inverse de l'autre, semblablement à une fonction dépendant de la coordonnée suivant laquelle varie la propriété considérée (généralement suivant l'épaisseur z).

$$V_m = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^p \quad (1.1)$$

Avec h l'épaisseur de la structure (poutre, plaque, coque) et p $(0 \leq p < \infty)$ est un paramètre lié à l'exposant de la fraction volumique et qui gère le profil de la variabilité du matériau le long de l'épaisseur de la strate du FGM. Il existe un nombre infini de la distribution de la composition en faisant varier le paramètre de l'exposant p (figure 1.15).

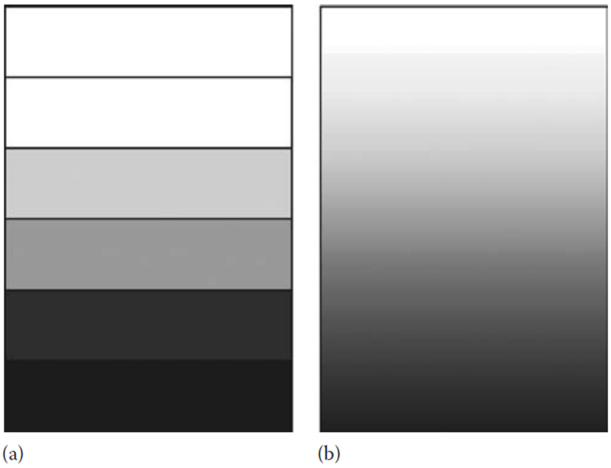


Figure 1.14 Modèle analytique de distribution dans une couche de matériau FGM

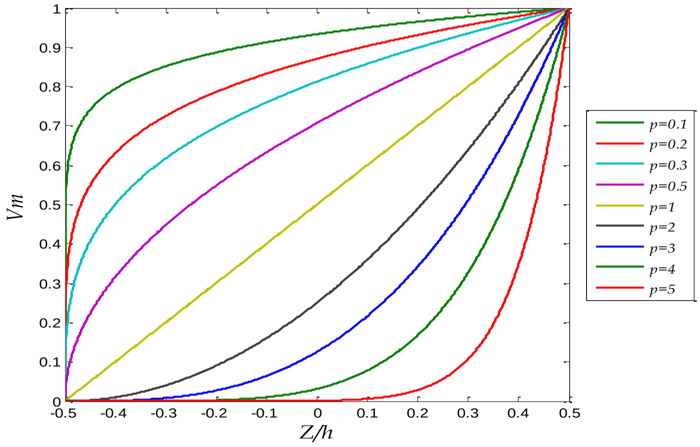


Figure 1.15 Variation de la fraction volumique du métal à travers l'épaisseur.

Dans le but de faire une analyse approfondie et une modélisation exacte des structures en FGM leurs propriétés doivent être représentées avec justesse. Cette dernière s'obtient par la simple règle de mélange, très connue dans le domaine des matériaux composites, connu sous le nom de 'modèle de Voigt'. Les propriétés des matériaux effectives P_F d'un FGM, comme

le module d'élasticité E_f (module de Young) et le coefficient de dilatation thermique α_f s'expriment par la formule (1.2), suivante :

$$P_F = \sum_{i=1} P_i V_{Fi} \tag{1.2}$$

Avec P_i et V_{Fi} sont les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif *i* respectivement.

La sommation des fractions volumiques de tous les constituants du matériau FGM est égale à l'unité.

$$\sum_{i=1} V_{Fi} = 1 \tag{1.3}$$

Les structures en FGM sont conçues pour être utilisé dans des environnements à haute température, pour lesquels les propriétés mécaniques des matériaux de base constitutifs des FGM ne sont plus permanentes, mais elles prennent des variations importantes en fonction de la température (Reddy 1998).

Il est donc important de considérer amplement cette relation de dépendance de la température pour une prédiction précise de la réponse mécanique. De ce fait, le module de Young E_f, le coefficient de Poisson ν_f, le coefficient de dilatation thermique α_f, et la conductivité thermique κ_f sont donc fonction de la température.

Tableau 1.2 Propriétés à température ambiantes

Matériaux	Propriétés mécaniques		
	E [GPa]	ν	ρ[Kg/m^3]
Aluminium ($\mathbf{Al}$)	70	0.3	2702
Alumina($\mathbf{Al_2O_3}$)	380	0.3	3800
Zircon ($\mathbf{ZrO_2}$)	200	0.3	5700

Dans le cas d'une distribution en loi de puissance suivant la direction de l'épaisseur de la structure (poutre, plaque où coque) les propriétés matérielles effectives E_f, ν_f, α_f et κ_f s'évaluent par les expressions (1.4) jusqu'à (1.7) respectivement (Reddy 1998).

$$E_f = [\, E_m(T) - E_c(T)] \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + E_c(T) \tag{1.4}$$

$$\nu_f = [\nu_m(T) - \nu_c(T)] \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \nu_c(T) \tag{1.5}$$

$$\rho_f = [\, \rho_m(T) - \rho_c(T)] \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \rho_c(T) \tag{1.6}$$

$$\alpha_f = [\,\alpha_m(T) - \alpha_c(T)]\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \alpha_c(T) \tag{1.7}$$

Il est clair que les propriétés E_f, ρ_f, α_f et ν_f sont fonction de la position et de la température à la fois.

Cette représentation est simple et facile à appliquer pour prédire les propriétés des matériaux et les réponses globales, mais, en raison de ces simplifications la conformité est affectée par la microstructure graduée. Comme il est mentionné précédemment les renseignements précises sur la forme, la taille et la répartition des particules ne sont pas disponibles et les modules élastiques effectifs des microstructures graduées doivent être évalués en fonction de la distribution de la fraction volumique et la forme approximative de la phase éparpillée. Des modèles micromécaniques ont été développés cette dernière décennie dans le but d'évaluer les propriétés effectives des FGM.

La théorie de Mori-Tanaka (Mori et Tanaka , 1973)pour évaluer les propriétés effectifs est approprié pour les zones de la microstructure à gradient, ayant une matrice continue convenablement définie et une phase discontinue telle que représentée à la Figure 1.10. Cette théorie de Mori-Tanaka prend en compte l'interaction des champs élastiques entre inclusions voisines. L'approche auto-consistante (self-consistent method) (Hill, 1956) se base sur le faite que chaque inclusion de renforcement est submergée dans un milieu continu dont les propriétés effectives sont celles du composite. L'approche en question ne fait pas de distinction entre la matrice et les inclusions (phases) de renforcement. Les modules globaux sont espérés dans un autre composite dans lequel les rôles des phases sont commutables. Cela rend le matériau particulièrement approprié pour déterminer les modules effectifs dans les régions ayant une microstructure interconnectée du squelette Figure 1.16.

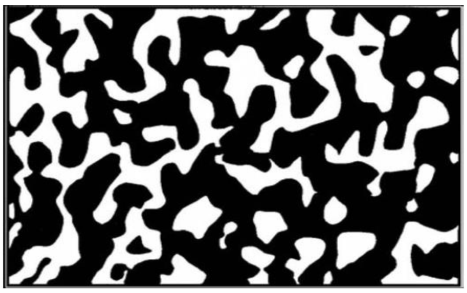


Figure 1.16 Squelette Microstructure du matériau FGM (Vel et Batra 2002)

Ainsi, le modèle de Mori-Tanaka témoigne des prévisions précises des propriétés avec une matrice continue convenablement définie et des inclusions discontinues. Tandis que le

modèle auto-consistant est mieux adapter pour les microstructures squelette caractérisées par une large zone de transition.

1.3 Conclusion

Dans le présent chapitre nous avons fait un tour d'horizon sur les matériaux composites et plus précisément sur les matériaux composites à gradient fonctionnel. Dans le chapitre subséquent nous abordons la modélisation des structures poutres en FGM par la méthode des éléments finis.

1.4 Bibliographie

Ashby, M. F. (2005). Materials selection in mechanical design. MRS Bull, 30(12), 995.

Birman, V., & Byrd, L. W. (2007). Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. Applied mechanics reviews, 60(5), 195-216.

Chan, S. H. (2001). Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine. International journal of thermal sciences, 40(3), 255-261.

Chi, S. H., & Chung, Y. L. (2003). Cracking in coating–substrate composites with multi-layered and FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics, 70(10), 1227-1243.

Delale, F., & Erdogan, F. (1983). The crack problem for a nonhomogeneous plane. Journal of Applied Mechanics, 50(3), 609-614.

Drake, J. T., Williamson, R. L., & Rabin, B. H. (1993). Finite element analysis of thermal residual stresses at graded ceramic-metal interfaces. Part II. Interface optimization for residual stress reduction. Journal of Applied Physics, 74(2), 1321-1326.

Fuchiyama, T., & Noda, N. (1995). Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material. JSAE review, 16(3), 263-268.

Fukui, Y. (1991). Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force. JSME international journal. Ser. 3, Vibration, control engineering, engineering for industry, 34(1), 144-148.

Hill, R. (1965). A self-consistent mechanics of composite materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 13(4), 213-222.

Hirai, T., & Chen, L. (1999). Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan. In Materials Science Forum (Vol. 308, pp. 509-514). Trans Tech Publications.

Jin, Z. H., & Noda, N. (1993). Minimization of thermal stress intensity factor for a crack in a metal-ceramic mixture (No. CONF-921128--). American Ceramic Society, Westerville, OH (United States).

M. Koizumi, 1993, "The concept of FGM," Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials, vol. 34, pp. 3-10, 1993.

Liu, L. S., Zhang, Q. J., & Zhai, P. C. (2003). The optimization design of metal/ceramic FGM armor with neural net and conjugate gradient method. In Materials Science Forum (Vol. 423, pp. 791-795). Trans Tech Publications Ltd., Zurich-Uetikon, Switzerland.

Markworth, A. J., Ramesh, K. S., & Parks, W. P. (1995). Modelling studies applied to functionally graded materials. Journal of Materials Science, 30(9), 2183-2193.

Matsuzaki, Y., Kawamura, M., & Fujioka, J. (1993). Analysis-assisted fabrication of TiAl-based thermal barrier FGM and its performance in a supersonic hot gas flow. Ceramic Transactions, 34 pp., 323.

Mori, T., & Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. Acta metallurgica, 21(5), 571-574.

K. Morinaga and K. U. Toto, 1993, "Fabricate Thick Alumina-Tungsten FGM Using Slip Cast Method," Sci. Technol, p. 4, December 1993

Müller, E., Drašar, Č., Schilz, J., & Kaysser, W. A. (2003). Functionally graded materials for sensor and energy applications. Materials Science and Engineering: A, 362(1-2), 17-39.

Noda, N. (1999). Thermal stresses in functionally graded materials. Journal of Thermal Stresses, 22(4-5), 477-512.

Paszkiewicz, B., Paszkiewicz, R., Wosko, M., Radziewicz, D., Ściana, B., Szyszka, A., ... & Tłaczała, M. (2007). Functionally graded semiconductor layers for devices application. Vacuum, 82(4), 389-394.

G. Paulino , Z. Jin Z.H. and J. R. Dodds , 2003. "Failure of functionally graded Materials, in Comprehensive Structural Integrity," Elsevier Science, vol. Vol. 2 (eds. B. Karihallo and W.G. Knauss), p. 607–644, 2003

Paulino, G. H., Jin, Z. H., Dodds, R. H., Sahu, S. K., Badgayan, N. D., & Sreekanth, P. R. (2014). Failure of functionally graded materials.

Qiu, J., Tani, J., Ueno, T., Morita, T., Takahashi, H., & Du, H. (2003). Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators. Smart materials and Structures, 12(1), 115.

Reddy, J. N., & Chin, C. D. (1998). Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. Journal of thermal Stresses, 21(6), 593-626.

Shen, H. S. (2004). Bending, buckling and vibration of functionally graded plates and shells. Advances in Mechanics, 34(1), 53-60.

Smith, B. W. (1993). Fractography for continuous fiber composites. Engineered materials handbook, 1, 786-793.

Tanigawa, Y. (1995). Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials. Applied Mechanics Reviews, 48(6), 287-300.

Takebe, H., & Morinaga, K. (1994). Fabrication of zirconia-nickel functionally gradient materials by slip casting and pressureless-sintering. MATERIAL AND MANUFACTURING PROCESS, 9(4), 721-733.

Uemura, S. (2003). The activities of FGM on new application. In Materials Science Forum (Vol. 423, pp. 1-10). Trans Tech Publications.

Vel, S. S., & Batra, R. C. (2002). Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. AIAA journal, 40(7), 1421-1433.

Watari, F., Yokoyama, A., Omori, M., Hirai, T., Kondo, H., Uo, M., & Kawasaki, T. (2004). Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application. Composites Science and Technology, 64(6), 893-908.

Williamson, R. L., Rabin, B. H., & Drake, J. T. (1993). Finite element analysis of thermal residual stresses at graded ceramic-metal interfaces. Part I. Model description and geometrical effects. Journal of Applied Physics, 74(2), 1310-1320.

Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T., & Shiota, I. (1990). FGM-90. In Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materilas, FGM Forum, Tokyo, Japan.

Yin, H. M., Sun, L. Z., & Paulino, G. H. (2004). Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions. Acta Materialia, 52(12), 3535-3543.

ANNEXE

Propriétés matérielles et lois de distribution des structures en FGM

1. Propriété matérielle d'une structure P-FGM (Loi de Puissance)

La fraction volumique de la distribution obéissant à une distribution en loi de puissance P-FGM s'écrit comme suit :

$$V_c(z) = \left(\frac{z + h/2}{h}\right)^p \tag{1.8}$$

Où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de l'élément de structure. Une fois la fraction volumique locale $V_c(z)$ est déterminée, les propriétés matérielles de la loi P-FGM se déterminent par la loi des mélanges comme suit :

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c(z) + E_m$$

$$E(z) = (E_c - E_m)\left(\frac{z + h/2}{h}\right)^p + E_m \tag{1.9}$$

Où E_c et E_m sont les modules de Young de la surface supérieure ($z = +h/2$) et de la surface inférieure ($z = -h/2$) respectivement.

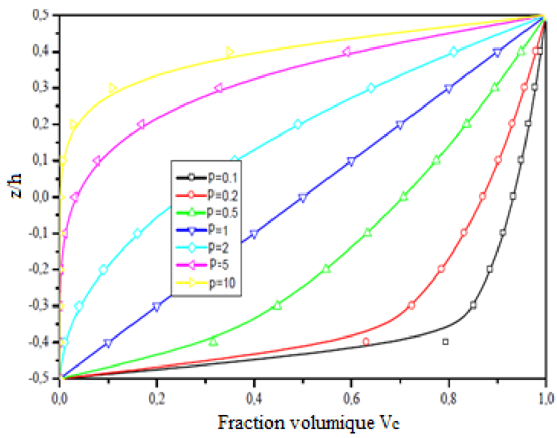


Figure 1.17 Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur selon la loi P-FGM

La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur d'un élément de structure P-FGM est représentée sur la (Figure 1.17). Il est claire que cette variation évolue rapidement près de la surface inférieure pour $p < 1$ et accroît rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

2. Propriété matérielle d'une structure S-FGM (Loi Sigmoïde)

Pour assurer une bonne distribution des contraintes entre toutes les interfaces, Chi et al. en 2003 ont utilisé deux fonctions de loi de puissance, pour définir la fraction de volume, chacune sur un demi plan de l'élément de structure selon la profondeur z. Ces deux fonctions sont définies comme suit :

$$V_c(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h/2+z}{h/2}\right)^p \quad \text{pour :} -h/2 \leq z \leq 0 \tag{1.10a}$$

$$V_m(z) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{h/2-z}{h/2}\right)^p \quad \text{pour :} 0 \leq z \leq h/2 \tag{1.10b}$$

Par la loi de Voigt le module de Young de l'élément S-FGM s'obtient par :

$$E(z) = V_c(z)E_c + [1 - V_c(z)]E_m \qquad \text{Pour :} -h/2 \leq z \leq 0 \tag{1.11a}$$

$$E(z) = V_m(z)E_c + [1 - V_m(z)]E_m \qquad \text{Pour :} 0 \leq z \leq h/2 \tag{1.11b}$$

L'allure de ces deux fonctions de puissance est sous forme de sigmoïde, de ce fait la loi de distribution est notée par S-FGM. Elle est représentée sur la figure 1.18. On remarque que cette distribution est antisymétrique par rapport au plan moyen.

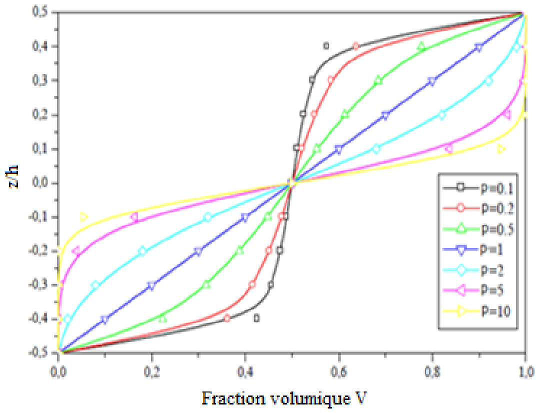


Figure 1.18 Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur selon la loi S-FGM

3. Propriété matérielle d'une structure E-FGM (Loi Exponentielle)

Une fonction exponentielle a été utilisée par Delale en 1983 pour représenter les propriétés matérielles des FGM. Elle est de la forme :

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \tag{1.12a}$$

$$B = \frac{1}{h} ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) \tag{1.12b}$$

Pour le cas du module de Young elle se représente comme suit :

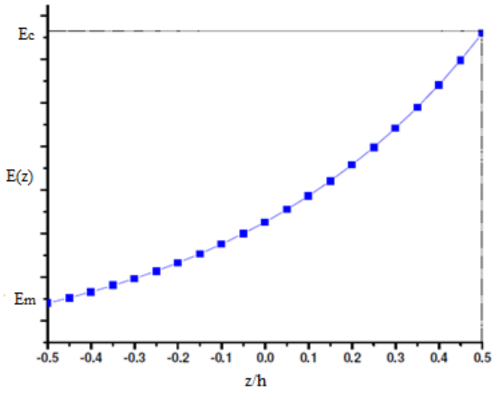


Figure 1.19 Variation du module de Young à travers l'épaisseur selon la loi E-FGM

Chapitre 2

Elément linéique en FGM

SOMMAIRE

Chapitre 2 : Elément linéique en FGM

Dans le présent chapitre, nous proposons une théorie de poutre à déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour la flexion de poutre fonctionnellement graduée. Nous utilisons une nouvelle fonction de cisaillement polynomiale qui satisfait aux conditions aux limites de contraintes de cisaillement nulles (conditions aux limites exactes sur la contrainte de cisaillement) à la fois sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre. Par conséquent, le facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire. De plus, la présente théorie montre de fortes similitudes avec la théorie des poutres de Timoshenko dans certains concepts tels que les équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions résultantes des contraintes. Les équations gouvernant le mouvement et les conditions aux limites se dérivent du principe du minimum de l'énergie potentielle totale. Les poutres en matériau à gradient fonctionnel (FGM) présentent une variation régulière des propriétés du matériau en raison du changement continu (ininterrompu) des détails de la microstructure. La variation des propriétés du matériau se situe le long de l'épaisseur de la poutre et est supposée suivre une loi de puissance de la fraction volumique des constituants. Les solutions numériques obtenues par éléments finis avec la nouvelle fonction polynomiale de déformation de cisaillement sont présentées et les résultats obtenus ont été évalués et comparés avec les solutions existantes pour vérifier la validité de la présente formulation. Enfin, les influences de l'indicateur de loi de puissance de la nouvelle fonction polynomiale de déformation de cisaillement sur la flexion de poutres à gradient fonctionnel sont explorées.

2.1. Introduction

Le concept des matériaux à gradient fonctionnel (FGM en anglais) a été mis au point en 1984 par des spécialistes des matériaux Japonais cherchant des matériaux super résistants à la chaleur destinés à être utilisés dans les navettes spatiales. Les matériaux fonctionnels (FGM) sont des composites microscopiquement inhomogènes souvent fabriqués à partir d'un mélange de métaux et de céramiques. Ils sont une classe de composites ayant une variation continue des propriétés du matériau à partir des surfaces supérieure et inférieure, d'une structure de poutre par exemple, et éliminent ainsi la concentration des contraintes à l'interface des couches observées dans les composites stratifiés. La combinaison de différents matériaux avec des propriétés physiques spécifiques permet une conception de matériau adaptée, qui étend l'espace de conception structurelle en mettant en œuvre une réponse multifonctionnelle avec un minimum de poids. La figure 2.1 présente une structure de poutre FGM dans laquelle le matériau passe graduellement de la partie entièrement métallique en bas à la partie supérieure

entièrement en céramique. La zone métallique est utilisée pour supporter les charges mécaniques, tandis que la partie céramique sert de protection thermique. En raison de la croissance des applications FGM dans les structures d'ingénierie, différentes théories de poutre ont été développées pour prédire la réponse mécanique des poutres fonctionnellement graduées. La première est la théorie des poutres classique (CBT Classical Beam Theory), connue sous le nom de théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (EBBT Euler Bernoulli Beam Théory) (Euler, 1744). C'est la plus simple des théories et elle s'applique uniquement aux poutres minces (élancées). Pour les poutres modérément épaisse, la CBT sous-estime la flèche et la contrainte de cisaillement, en ignorant l'effet de déformation de cisaillement transversale (Yang, 2008, Simsek, 2009, Alshorbagy, 2011). Pour cette raison elle ne s'applique pas aux poutres épaisses. La deuxième théorie des poutres est la théorie des poutres à déformation de cisaillement transversal du premier ordre (FSDBT First Shear Deformation Beam Theory). Elle est connue sous l’appellation de théorie des poutres de Timochenko Beam Theory (TBT Timochenko Beam Theory) (Timochenko, 1921, 1922). Elle a été proposée pour surmonter les limitations de la CBT en tenant en compte de l'effet de déformation de cisaillement transversal. Puisque la FSDBT viole les conditions de contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour justifier la divergence entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte supposé constant (Chakraborty et al. 2003, Sina, 2009, Wei, 2012). Pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement transversal et avoir une meilleure prédiction de la réponse de la poutre, des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT Higher Shear Deformation Theory) ont été développées et proposées par plusieurs auteurs, y compris la théorie du troisième ordre de Reddy (TTR Third-order Theory of Reddy). (Reddy 1984, Wang, 2000, Yesilce, 2009, 2010, 2011), la théorie hyperbolique de Soldatos (1992), la théorie sinusoïdale de Touratier (1991), la théorie exponentielle de Karama et al. (2003, 2009) ; Ainsi que la formulation unifiée de Carrera (2003) et Carrera et al. (2011). Aydogdu (2006 & 2009) a présenté une étude dans laquelle il a comparé les différentes théories d'ordre supérieur, tel que la théorie de déformation de cisaillement parabolique (PSDT Parabolic Shear Deformation Theory), la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique (TSDT Trigonometric Shear Deformation Theory) et la théorie de déformation de cisaillement exponentielle (ESDT Exponentielle Shear Deformation Theory) avec la théorie de l'élasticité tridimensionnelle.

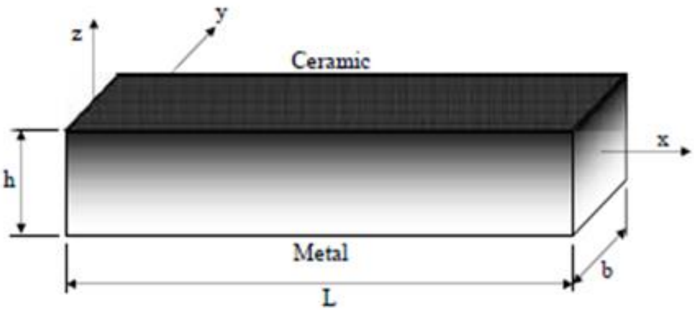


Figure 2.1 Exemple de structure poutre en FGM

Généralement, afin d'augmenter la précision des résultats, l'augmentation du degré du polynôme de l'équation cinématique est une alternative à considérer :

$$U_i(M,t) = U_i(M_0,t) + zw_i^{(1)}(M_0,t) + z^2w_i^{(2)}(M_0,t) + z^3w_i^{(3)}(M_0,t) + \cdots \quad (2.1)$$

Avec z la coordonnée perpendiculaire au plan x-y.

Cette technique n'est pas préférée par plusieurs chercheurs en raison de son coût élevé en termes de calcul. Dans ce contexte, plusieurs simplifications ont été proposées pour réduire le nombre de paramètres de déplacement. Une de ces simplifications consiste à simplifier les derniers termes de la série Taylor de la "fonction de cisaillement". La forme de la cinématique du mouvement proposé à travers l'épaisseur est la suivante :

$$u(x,z) = u_0(x) - z\frac{\partial w_0}{\partial x}(x) + f(z)\theta_z(x) \quad (2.2)$$

$$w(x,z) = w_0(x) \quad (2.3)$$

f(z) peut être considéré comme la fonction de cisaillement pour déterminer la distribution de la déformation et de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Selon cette fonction f(z), nous pouvons distinguer certains modèles, à déformation d'ordre supérieur, important dans la littérature, et ceux-ci sont décrits dans le tableau 2.1.

Des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur peuvent être développées en imposant une variation d'ordre élevé, à travers l'épaisseur de la poutre, du déplacement axial (Aydogdu et Taskin, 2007; Kadoli et al., 2008; Simsek, 2009; Ben-Oumrane, 2009, Li, 2010, Simsek, 2010, Wattanasakulpong, 2011) ou bien, à la fois, une variation d'ordre élevé des déplacements axial et transversal selon l'épaisseur de la poutre (i.e. en utilisant une formulation unifiée) (Giunta et al., 2010a, 2010b et 2011). Dans le présent chapitre nous présentons une théorie de poutre à déformation de cisaillement transversal d'ordre supérieur pour les poutres en FGM fléchies. Celle-ci est basée sur une nouvelle fonction de cisaillement polynomiale satisfaisant les conditions aux limites de contraintes nulles sur les surfaces libres supérieure et

inférieure de la poutre. Par conséquent, le facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire. En outre, la présente théorie a de fortes similitudes avec la théorie des poutres classique CBT par de nombreuses expressions ; telles que les équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions résultantes des contraintes.

Tableau 2.1. Différentes fonctions de cisaillement

Autheurs	Fonctions de Cisaillement
Ambartsumyan, 1958	$f(z)=\frac{z}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{z^2}{3}\right)$
Kaczkowski, 1968; Panc, 1975; Reissner, 1975	$f(z)=\frac{5z}{4}\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)$
Levinson, 1980; Murthy, 1981; Reddy, 1984	$f(z)=z\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)$
Levy, 1877; Stein, 1986; Touratier, 1991	$f(z)=\frac{h}{\Pi}sin\left(\frac{\Pi z}{h}\right)$
Soldatos, 1992	$f(z)=hsin\left(\frac{z}{h}\right)-zcosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Karama et al., 2003, 2009	$f(z)=\mathrm{z}\mathrm{e}^{-2(\mathrm{z}/\mathrm{h})^2}$
Ferreira et al., 2005	$f(z)=sin\left(\frac{\Pi z}{h}\right)$
Aydogdu, 2009	$f(z)=\mathrm{z}\alpha^{-2(\mathrm{z}/\mathrm{h})^2/\ln\alpha}$ $\alpha>0$
Mantari et al., 2011	$f(z)=z\alpha^{-2(z/h)^2}$
Mantari, Oktem & Soares, 2012	$f(z)=tan(mz)$
Mantari, Oktem & Soares, 2012	$f(z)=sin\left(\frac{\Pi z}{h}\right)e^{m\,cos(\Pi z/h)}$
Mantari and Soares, 2012	$f(z)=sin\left(\frac{z}{h}\right)e^{m\,cosh(z/h)}$
Grover et al., 2013	$f(z)=sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right)-z\frac{2r}{h\sqrt{r^2+4}}$,r = 3
Sahoo and Singh, 2013	$f(z)=cot^{-1}\left(\frac{rh}{z}\right)-\frac{4r}{h(4r^2+1)}$ $r=0.46$

Les propriétés matérielles des poutres en FGM varient en fonction d'une distribution de loi de puissance de la fraction volumique des constituants. Les équations du mouvement et

les conditions aux limites se dérivent du principe de l'énergie potentielle totale minimale. Des exemples numériques sont présentés à la fin du présent chapitre pour montrer la validité et la précision de la présente fonction de déformation de cisaillement transversal et pour montrer les effets de l'indice de la loi de puissance et de la déformation de cisaillement sur la flexion des poutres en FGM. Des solutions numériques pour la flexion sont obtenues pour de nombreuses poutres sous différentes sollicitations.

2.2. Propriétés matérielles de poutre FGM et axe neutre

2.2.1. Propriétés matérielles effectives des poutres métal-céramique à gradients fonctionnels

La figure 2.2 montre une poutre en FGM composée de céramique et de métal, de longueur L, de largeur b et d'épaisseur h. Les propriétés du matériau varient de manière continue et non uniforme suivant la direction z. La surface supérieure se compose seulement de céramique et la surface inférieure est purement en métal. Entre les deux, les fractions volumiques, de la céramique V_c et du métal V_m, sont obtenues par une distribution de loi de puissance en conjonction avec la simple loi des mélanges comme suit :

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p \tag{2.4}$$

$$V_m = 1 - V_c \tag{2.5}$$

Où : z est la distance de l'axe neutre ;

p est l'indice de la loi de puissance. C'est un paramètre variable non négatif dictant le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur de la poutre. La valeur de p = 0 représente une poutre purement en céramique ; si p est infini, la poutre est entièrement en métal, pour p = 1 la variation de la combinaison du métal et de la céramique est linéaire et quand la valeur de p croit, la teneur en métal dans la poutre FGM augmente.

La variation de la fraction volumique de la céramique dans la direction de l'épaisseur des poutres FGM en fonction de différentes valeurs de p est illustrée sur la figure 2.3. Les propriétés effectives du matériau MP_{eff} sont évaluées par la relation :

$$MP_{eff} = MP_m V_m(z) + MP_c V_c(z) \tag{2.6}$$

où MP_m et MP_c représentent respectivement les propriétés matérielles des métaux et des céramiques. Ainsi, le module d'élasticité E_{eff}, le coefficient de Poisson ν_{eff} et le module de cisaillement G_{eff} des FGM peuvent être exprimés par les relations :

$$E_{eff} = (E_c - E_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p + E_m \tag{2.7.a}$$

$$\nu_{eff} = (\nu_c - \nu_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p + \nu_m \tag{2.7.b}$$

$$G_{eff} = (G_c - G_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p + G_m \tag{2.7.c}$$

En utilisant les expressions ci-dessus, il est possible d'obtenir une approche de la variation des propriétés du matériau à travers l'épaisseur de la poutre pour différents indices de loi de puissance. Les figures 2.4a, 2.4b et 2.4c illustrent la variation du module de Young, du coefficient de Poisson et du module de cisaillement d'une poutre en FGM. Il a été confirmé par Delale (1983), Ziou et al. (2016) et Guenfoud et al. (2016) en utilisant une méthode énergétique que la variation du coefficient de Poisson n'a pas beaucoup d'influence sur l'évaluation de la déformation. Par conséquent, nous avons adopté le même coefficient de Poisson pour les deux matériaux.

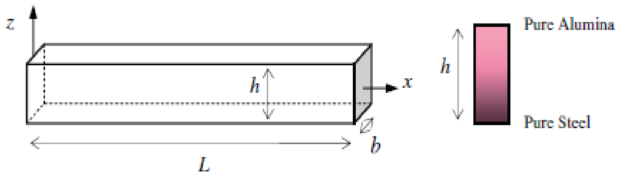


Figure 2.2 Géométrie d'une poutre FGM

Variation de la céramique et du métal à travers l'épaisseur

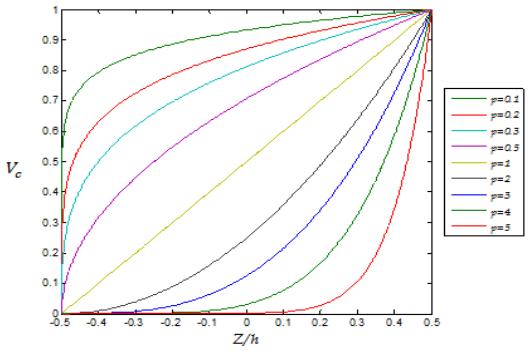


Figure 2.3 Variation de la fraction volumique de la céramique suivant l'épaisseur

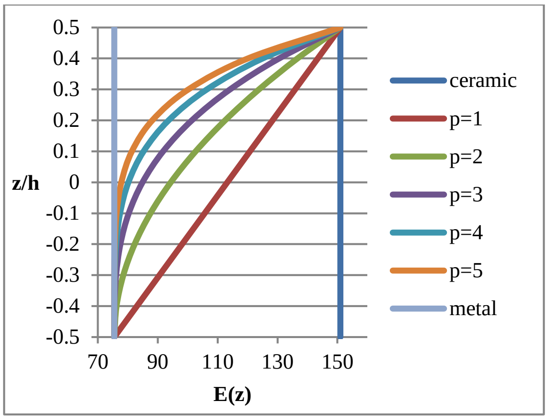


Figure 2.4.a Module de Young E (z)

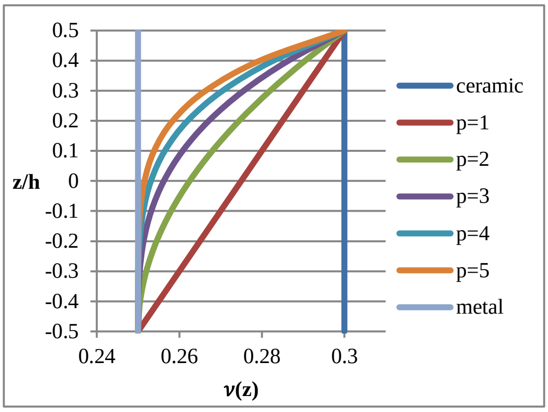


Figure 2.4.b Coefficient de Poisson ν (z)

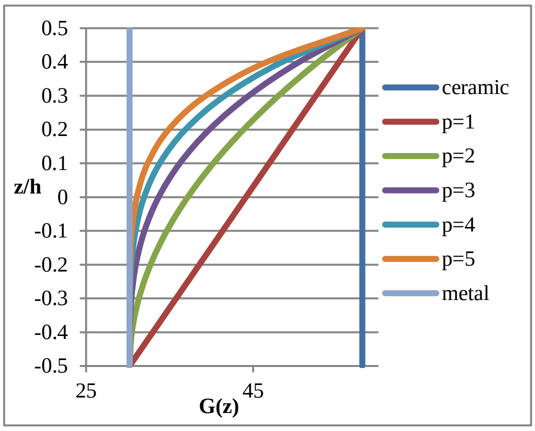


Figure 2.4.c Module de cisaillement transversal G (z)

Figure 2.4 Variation du : module de Young, coefficient de Poisson et module de cisaillement transversal pour une poutre FGM le long de l'épaisseur pour différentes lois de puissance

2.2.2. Position de l'axe neutre

La position de l'axe neutre doit être connue afin de déterminer une solution attrayante. Évidemment, en raison de la variation des propriétés matérielles de la poutre (le module de Young précisément), l'axe neutre ne se trouve plus confondu avec la ligne moyenne de la poutre, mais il se trouve décaler de celle-ci (ligne moyenne) à l'exception des poutres avec une variation symétrique du module de Young.

Pour déterminer la position de l'axe neutre, nous considérons un nouveau système de coordonnées, figure 2.5, tel que le nouvel axe x est positionné sur l'axe neutre, qui sera déterminé comme suit. Par la suite, nous avons :

$$x = x' \qquad z = z' + h_0 \tag{2.8}$$

Où h_0 est la distance entre l'axe neutre et la ligne médiane de la poutre. Dans ce cas et de manière similaire au traitement habituel dans la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (EBBT), on peut

directement écrire :

$$\varepsilon_{xx} = -z' \frac{d^2w}{dx^2} \qquad \text{et} \qquad \sigma_{xx} = E(z')\,\varepsilon_{xx} \tag{2.9}$$

Où w est la flèche de la poutre FGM. La position de l'axe neutre peut être déterminée en choisissant h_0 de sorte que la résultante de force axiale agissante sur la section devient nulle :

$$\sum F_x = 0 \int_{h_0-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_0} \sigma_{xx}\ dA = 0 \tag{2.10}$$

En substituant l'équation (2.8) conjointement avec (2.9) dans (2.10), nous obtenons

$$\int_{-h_0-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_0} b.E(z').z'.\frac{d^2w}{dx^2}dz' = 0 \tag{2.11}$$

En changeant les bornes de l'intervalle, on obtient

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b.E(z').(z-h_0).\frac{d^2w}{dx^2}dz = 0 \tag{2.12}$$

Alors,

$$b.\frac{d^2w}{dx^2}\left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z).z.dz - h_0\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z).dz\right) = 0 \tag{2.13}$$

La position de l'axe neutre se détermine par :

$$h_0 = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z).z.dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z).dz} \tag{2.14}$$

Alors, les rigidités de membrane, de couplage et de flexion deviennent :

$$\widehat{D}_{aa} = b\int_{-h/2}^{+h/2} E(z)dz = bh\left(E_m + \frac{E_c - E_m}{p+1}\right) \tag{2.15.a}$$

$$\widehat{D}_{ab} = b\int_{-h/2}^{+h/2} E(z)zdz = \frac{bh^2}{2}(E_c - E_m)\left[\frac{p}{(p+1)(p+2)}\right] \tag{2.15.b}$$

$$\widehat{D}_{bb} = b\int_{-h/2}^{+h/2} E(z)z^2dz = \frac{bh^2}{12}\left[3(E_c - E_m)\frac{p^2+p+2}{(p+3)(p+2)(p+1)}\right] \tag{15.c}$$

En substituent les équations (2.15.a) et (2.15.b) dans l'équation (2.14) nous obtenons :

$$\frac{h_0}{h} = \frac{(E_c - E_m)\frac{p}{(p+2)(2p+2)}}{E_m + \frac{E_c - E_m}{p+1}} \tag{2.16}$$

2.3. Cinématique et relations contrainte-déformation

Considérons une poutre droite de longueur L et d'axe neutre x reliant les centres de gravité G de toutes les sections, avec x-z étant un plan d'inertie principal. Ici, les axes de coordonnées sont choisis de telle sorte que l'axe x est orienté dans la direction axiale à la ligne moyenne de la poutre et l'axe z positif est dirigé vers le haut et il est perpendiculaire à l'axe x, comme illustré sur la figure 2.5. Un matériau composite FGM constitue la section transversale. Par conséquent, en général, l'axe moyen de la poutre ne coïncide pas avec l'axe neutre. Les charges appliquées sur la poutre sont des forces verticales et des moments fléchissant maintenus dans le plan x-z, comme cela est habituel pour les poutres planes. La flexion sur le plan y-z ne sera pas considérée ici. L'hypothèse de Timoshenko pour la rotation de la normale est à tenir en compte. Les déplacements axial et vertical d'un point quelconque A de la section de la poutre sont exprimés comme suit :

$$u(x,z) = u_0(x) - z\frac{\partial w_0}{\partial x}(x) + f(z)\psi_x(x) \tag{2.18.a}$$

$$w(x,z) = w_0(x) \tag{2.18.b}$$

Avec:

– $\psi_x(x)$ est la fonction de gauchissement.

– $u(x,z)$ represente le déplacement longitudinal en tout point d’une section transversal.

– w_0 est le déplacement transversal suivant l’axe z de la poutre.

– $u_0(x) = u(x, z = 0)$ est le déplacement longitudinal de la ligne moyenne de la poutre selon l’axe x.

– $f(z)$ est la nouvelle fonction de cisaillement adoptée dans la présente étude.

$$f(z) = z\left(\frac{9}{8} - \frac{9z^2}{6h^2}\right) = z\left(\frac{9}{8} - \frac{9}{6}\left(\frac{z}{h}\right)^2\right) = \frac{9}{8}z - \frac{9z^3}{6h^2} \tag{2.19}$$

$$f'(z) = \left(\frac{9}{8} - \frac{9z^2}{2h^2}\right) \tag{2.20}$$

$$f''(z) = -\left(\frac{9z}{h^2}\right) \tag{2.21}$$

Pour le cas de la théorie classique des poutres CBT (théorie des poutres d'Euler-Bernoulli EBBT): f(z) = 0, tandis que pour la théorie des poutres avec déformation de cisaillement du premier ordre FSDBT (théorie des poutres de Timoshenko TBT): f (z) = z

Où ψ_x (x) est la déformation de cisaillement à la ligne moyenne de la poutre.

$$\psi_x(x) = \gamma_{xz}(x, z = 0) \tag{2.22}$$

La composante non nulle du tenseur de déformation est :

$$\varepsilon_x(x,z) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z)\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \tag{2.23}$$

$$\gamma_{xz}(x,z) = \frac{\partial f}{\partial z}.\psi_x \tag{2.24}$$

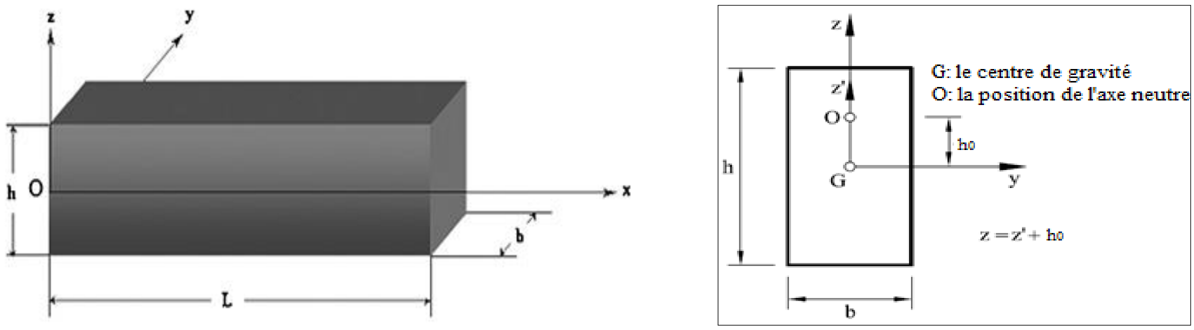


Figure 2.5 La position de l'axe neutre pour une section de poutre rectangulaire

$f'(z)$ est nulle à la fois sur la fibre supérieure et la fibre inférieure (pour $z = \pm h/2$), ce qui implique la nullité de la contrainte de cisaillement au niveau de ces fibres extrêmes . Il est clair que $f''(z)$ est égal à zéro à z = 0. Cela implique que la contrainte de cisaillement est maximale à la fibre médiane.

En introduisant l'expression de la fonction $f(z)$ dans l'équation (2.18.a), nous obtenons l'expression du déplacement u en fonction de : la position du point (x, z) et la fonction du cisaillement.

$$u(x,z) = u_0(x) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} + \left(\frac{9}{8}z - \frac{9z^3}{6h^2}\right)\psi_x \tag{2.25.a}$$

$$u(x,z) = u_0(x) - z\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{9}{8}\psi_x\right) + \frac{9z^3}{6h^2}\psi_x \tag{2.25.b}$$

L'équation (2.25.b) a la même forme que les équations utilisées par différents auteurs tels que Levinson (1980), Murthy (1981) et Reddy (1984) pour les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), qu'on peut la mettre sous la forme :

$$u(x,z) = u_0(x) + zu_1(x) + z^2u_2(x) + z^3u_3(x) \tag{2.26}$$

Comme la déformation de cisaillement transversal est nulle sur les deux fibres extrêmes de la poutre $\left(z = \pm\left(\frac{h}{2}\right)\right)$, il est donc clair que u_2 (x) doit être égale à zéro. Donc, l'équation (2.26) devient :

$$u(x,z) = u_0(x) + zu_1(x) + z^3u_3(x) \tag{2.27}$$

Dans la présente analyse et pour des raisons de simplification, la déflection de la poutre w est supposée indépendante de l'épaisseur, ce qui est assez fréquent dans les théories classiques et les théories d'ordre supérieur des poutres (Savoia, 1996). Pour développer la relation finale de déformation de cisaillement transversal, nous prenons en compte en premier lieu la condition au limite de la contrainte de cisaillement nulle aux lignes extrêmes (fibres) de la poutre, donc la déformation de cisaillement γ_{xz} (x, z) prend la forme

$$\gamma_{xz}(x,z) = \frac{\partial f}{\partial z}.\psi_x = \left(\frac{9}{8} - \frac{9z^2}{2h^2}\right)\psi_x \quad (2.28)$$

Où ψ_x est la fonction de gauchissement (fonction de contrainte de cisaillement) de la ligne moyenne de la poutre. Il est à noter qu'il existe d'autres expressions satisfassent les conditions aux limites nécessaires.

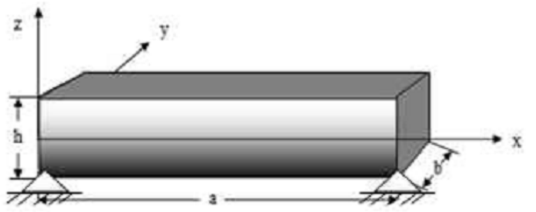


Figure 2.6 Elément de poutre FGM dans ses axes

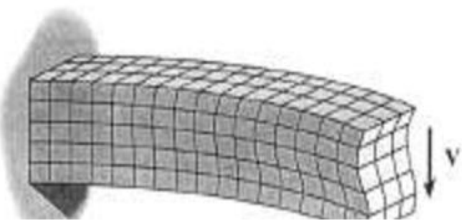


Figure 2.7 Gauchissement d'une section droite

Cependant, l'expression (2.19) est l'une des expressions les plus simples, car elle se caractérise par une fonction polynomiale continue et régulière.

En introduisant l'angle de rotation de la section perpendiculaire à la ligne médiane $\theta = \frac{\partial u}{\partial z}$ si z=0; par conséquent, nous obtenons :

$$\psi_x(x) = \theta + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2.29)$$

Ainsi, la déformation normale $\varepsilon_x(x,z) = \frac{\partial u}{\partial x}$ peut s'exprimée en fonction de la déflection transversale w_0 et de la rotation de la section par :

$$\varepsilon_x(x,z) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \left(\frac{9z}{8} - \frac{9z^3}{2h^2}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\frac{9z}{8} - \frac{9z^3}{2h^2}\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (2.30.a)$$

$$\gamma_{xz}(x,z) = \frac{\partial f}{\partial z}.\psi_x = \left(\frac{9}{8} - \frac{9z^2}{2h^2}\right)\left(\theta + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \quad (2.30.b)$$

Il est claire que si $z = 0$ la déformation longitudinale devient égale à $\varepsilon_x(x,z) = \frac{\partial u_0}{\partial x}$

2.4. Tests de validations et résultats numériques

Considérons une poutre FGM de longueur L et de section rectangulaire. Les dimensions de la section sont : h=0.1m et b=h/100 = 0.001m. Deux cas sont considérés ; le rapport longueur sur hauteur L/h plus élevé que 100 (pour la poutre mince) et L/h inférieur à 5 (pour la poutre épaisse). Le module de Young suit une loi de puissance (voir équation (2.7.a)), avec E_c = 10000 GPa et E_m=E_c/10=1000 GPa. Le coefficient de Poisson est égal à 0,25. La poutre est sollicitée par une pression uniforme égale à 1 Pa appliquée sur la fibre supérieure. Les grandeurs non-dimensionnelles utilisées ici sont E_c/E_m = 10, G_c/G_m=10. Les résultats du déplacement transversal (la flèche) de la poutre sont représentés sur les figures 2.8 et 2.11 pour différents exposants de loi de puissance p et pour différents rapports longueur sur épaisseur (L/h=100, L/h=5 respectivement). Pour cette poutre en FGM, la déflection transversale augmente avec l'augmentation de l'exposant de loi de puissance p. Comme on le voit sur les figures 2.9 et 2.12, la répartition des contraintes axiales est linéaire pour le cas de la poutre en céramique pure et les valeurs des contraintes de traction et de compression sont égales pour le cas de la poutre isotrope (céramique complète). Mais pour les autres valeurs de p, la répartition des contraintes axiales n'est pas linéaire et les valeurs des contraintes de compression sont également supérieures aux contraintes de traction. La valeur de la contrainte axiale est nulle sur le plan médian (poutre isotrope et pour p=0), mais il est clairement visible que les valeurs des contraintes axiales ne sont pas nulles dans le plan médian de la poutre en FGM pour des valeurs de p non nulles. Ceci indique que le plan neutre se déplace vers le côté supérieur de la poutre dans le cas de la poutre en FGM. Ceci est dû à la variation du module d'élasticité à travers l'épaisseur de la poutre en FGM. Les figures 2.10 et 2.13 illustrent la variation de la contrainte de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre pour différentes valeurs du rapport longueur sur épaisseur (L/h=100, L/h=5 respectivement) avec différentes théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur au point de coordonnée x=0.

On peut observer que les courbes obtenues avec la nouvelle fonction de cisaillement sont en bon accord avec celles données par les autres théories des poutres (Kaczkowski, 1968 ; Levinson, 1980) pour toutes les valeurs de loi de puissance p et de rapport L/h.

2.4.1 Premier cas : Poutre mince (rapport L/h=100)

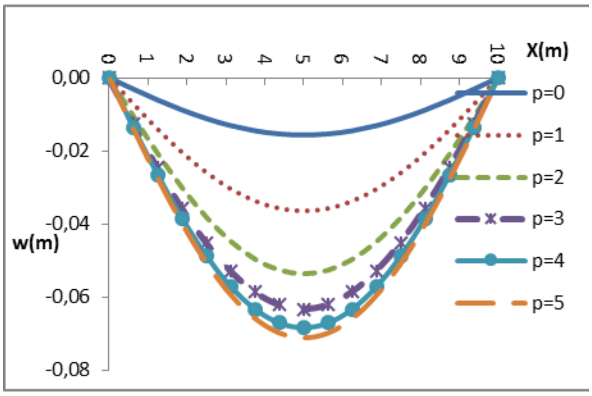


Figure 2.8 Flèche W de la poutre mince en FGM sous charge uniforme (L/h=100)

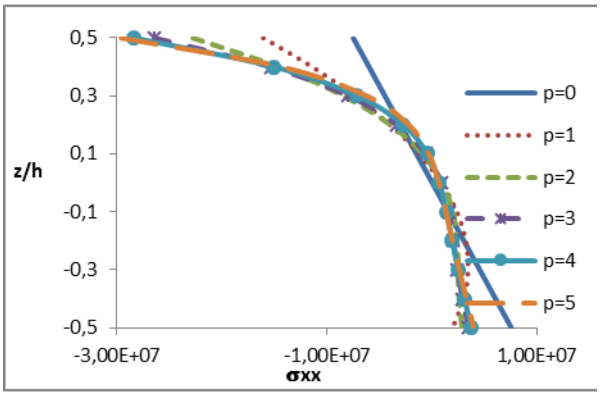
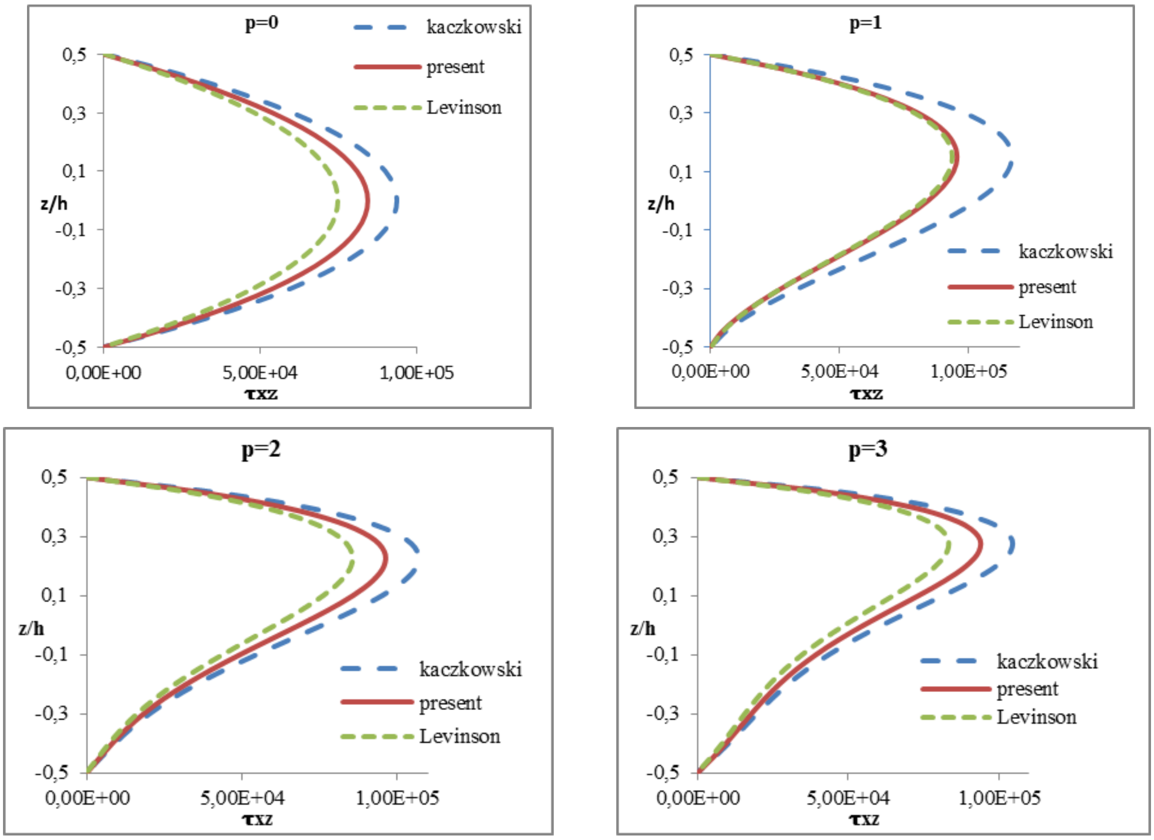
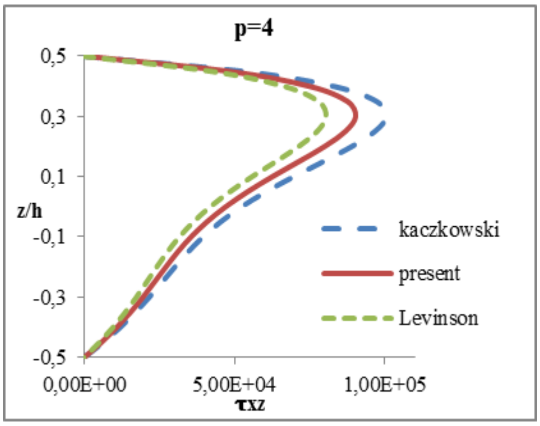


Figure 2.9 Variation de la Contrainte normale à travers l'épaisseur d'une poutre mince en FGM sous charge uniforme (L/h=100)





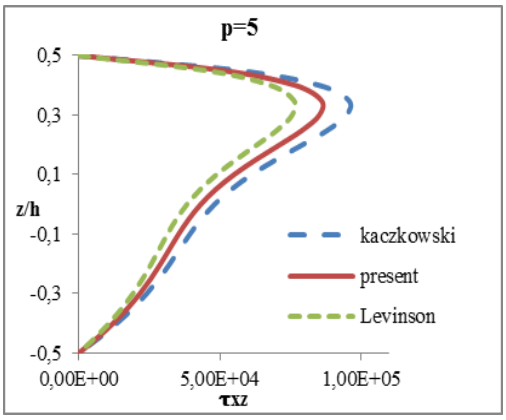


Figure 2.10 Variation de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur d'une poutre mince en FGM sous une charge uniforme à x=0 (L/h=100)

2.4.2 Deuxième cas : épaisse (rapport L/h=5)

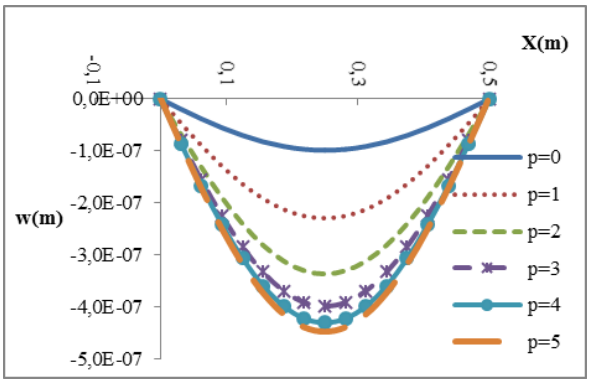


Figure 2.11 Variation du déplacement transversal W d'une poutre épaisse en FGM sous charge uniforme (L/h=5)

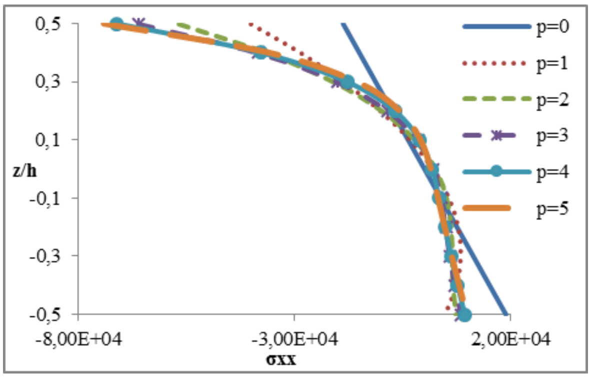
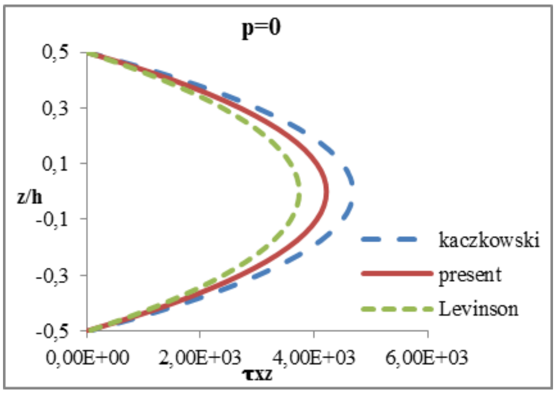
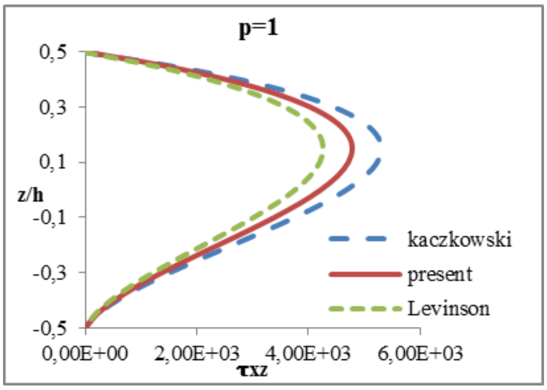


Figure 2.12 Variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur d'une poutre épaisse en FGM sous charge uniforme (L/h=5)





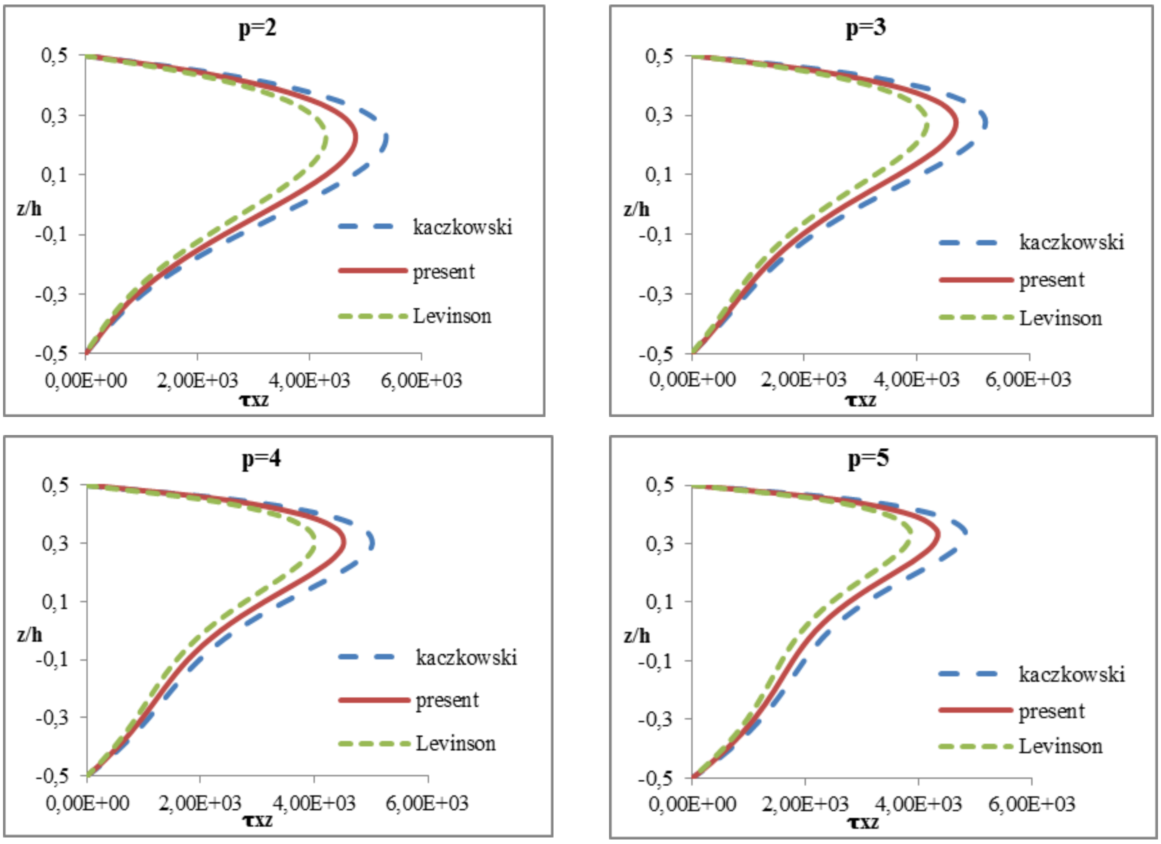


Figure 2.13 Variation de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur pour une poutre épaisse en FGM sous une charge uniforme à (x=0) (L/h=5)

2.5. Conclusion

Nous avons développé une nouvelle fonction de cisaillement transversal pour la théorie des poutres à déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour la flexion des poutres à gradient fonctionnel (FGM). La fonction de cisaillement transversal développée ici tient compte de la variation d'ordre supérieur de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la poutre et elle satisfait aux conditions aux limites de contrainte nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre. L'utilisation d'un facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire pour notre cas. Les solutions numériques par éléments finis obtenues avec la nouvelle fonction polynomiale de cisaillement transversal sont présentées aux figures 2.8 à 2.13. Cette nouvelle fonction a une forte convergence en comparaison avec les autres théories des poutres de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (Kaczkowski, 1968, Levinson, 1980) pour divers exposants de la loi de puissance p et pour différentes valeurs du rapport longueur sur épaisseur. D'une manière générale, tous les modèles des poutres à déformation de cisaillement transversal d'ordre supérieur donnent des résultats différents pour la contrainte transversale de cisaillement. Les différentes fonctions de déformations transversales de cisaillement utilisées dans chaque

modèle expliquent cette différence. Les courbes de contraintes obtenues par cette nouvelle fonction sont régulières et continues, par conséquent le problème de délaminage ne sera pas posé.

2.6. Bibliographie

Alshorbagy A.E., M.A. Eltaher, F.F. Mahmoud (2011) Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. Applied Mathematical Modelling 35(1): 412-425.

Ambartsumyan, S.A. (1958) On a general theory of bending theory of anisotropic plates and shallow shells. Investiia Akad. Nauk SSSR. Proceedings of the USSR Academy of Sciences, No. 5, 69-77.

Aydogdu, M., V. Taskin (2007) Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. Materials and Design 28(5): 1651-1656.

Aydogdu, M. (2006) Comparison of various shear deformation theories for bending, buckling, and vibration of rectangular symmetric cross-ply plate with simply supported edges. Journal of Composite materials 40(23): 2143-2155.

Aydogdu, M. (2009) A new shear deformation theory for laminated composite plates. Composite structures, 89(1): 94-101.

Ben-Oumrane, S., Abedlouahed, T., Ismail, M., Mohamed, B. B., Mustapha, M., & El Abbas, A. B. (2009) A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al 2 O 3 S-FGM thick beams. Computational Materials Science, 44(4): 1344-1350.

Carrera, E. (2003) Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. Archives of Computational Methods in Engineering 10(3):215-296.

Carrera, E., G. Giunta, M. Petrolo (2011) Beam Structures: Classical and Advanced Theories. West Sussex, UK, John Wiley & Sons, Ltd.

Chakraborty, A., S. Gopalakrishnan, J.N. Reddy (2003) A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. International Journal of Mechanical Sciences 45(3): 519-539.

Delale, F., F. Erdogan (1983) The crack problem for a nonhomo-geneous plane. Journal of Applied Mechanics 50(3): 609-614.

Euler, L. (1744). Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive propietate gaudentes, Additamentum I, De curvis elasticis. Lausanne, Genf : Bousqet & Socios.

Ferreira, A.J.M., C.M.C. Roque, R.M.N. Jorge (2005) Analysis of composite plates by

trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. Computers & structures 83(27): 2225-2237.

Giunta, G., S. Belouettar, E. Carrera (2010a) Analysis of FGM beams by means of classical and advanced theories. Mechanics of Advanced Materials and Structures 17(8): 622-635.

Giunta, G., S. Belouettar, E. Carrera (2010b) Analysis of FGM beams by means of a unified formulation. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 10(1): 012073.

Giunta G, Crisafulli D, Belouettar S, Carrera E., (2011) Hierarchical theories for the free vibration analysis of functionally graded beams. Composite Structures, 94(1):68-74.

Grover, N., D. Maiti, and B. Singh, (2013) A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates. Composite Structures, 95, 667-675.

Guenfoud Hamza., Ziou H., Himeur M., & Guenfoud M. (2016). Analyses of a composite functionally graded material beam with a new transverse shear deformation function. Journal of Applied Engineering Science & Technology, 2 (2), 105-113. Classe C

Kaczkowski, Z. (1968) Plates-statistical calculations. Warsaw: Arkady

Kadoli, R., Akhtar, K., & Ganesan, N. (2008) Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. Applied Mathematical Modelling, 32(12), 2509-2525.

Karama, M., Afaq, K. S., & Mistou, S. (2003) Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. International Journal of Solids and Structures, 40(6): 1525-1546.

Karama, M., Afaq, K. S., & Mistou, S. (2009) A new theory for laminated composite plates. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials Design and Applications, 223(2): 53-62.

Levinson, M. (1980) An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. Mechanics Research Communications, 7(6): 343-350.

Levy, M. (1877) Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes. Journal de mathématiques pures et appliquées : 219-306.

Li, X. F. (2008) A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams. Journal of Sound and vibration, 318(4): 1210-1229.

Li, X. F., Wang, B. L., & Han, J. C. (2010) A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams. Archive of Applied Mechanics, 80(10): 1197-1212.

Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2011) Static and dynamic analysis of laminated

composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory. Composite structures, 94(1): 37-49.

Mantari, J. L., & Soares, C. G. (2012) Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory. Composite Structures, 94(8): 2640-2656.

Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2012) A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. Composites Part B: Engineering, 43(3): 1489-1499.

Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2012) A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. International Journal of Solids and Structures, 49(1): 43-53.

Murthy M. V. V., (1981) An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates. NASA Technical Paper 1903, 37pp.

Panc, V. (1975) Theories of elastic plates (Vol. 2). Springer Science & Business Media.

Reddy, J. N. (1984) A simple higher-order theory for laminated composite plates. Journal of applied mechanics, 51(4): 745-752.

Reissner, E. (1975) On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. International Journal of Solids and Structures, 11(5): 569-573.

Sahoo, R., & Singh, B. N. (2013) A new shear deformation theory for the static analysis of laminated composite and sandwich plates. International Journal of Mechanical Sciences, 75: 324-336.

Savoia, M., & Tullini, N. (1996) Beam theory for strongly orthotropic materials. International journal of solids and structures, 33(17): 2459-2484.

Şimşek, M. (2009) Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method. Int J Eng Appl Sci, 1(3): 1-11.

Şimşek, M. (2010) Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. Nuclear Engineering and Design, 240(4): 697-705.

Sina, S. A., Navazi, H. M., & Haddadpour, H. (2009) An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. Materials & Design, 30(3): 741-747.

Soldatos, K. P. (1992) A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. Acta Mechanica, 94(3-4): 195-220.

Stein, M. (1986) Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing. AIAA journal, 24(9): 1537-1544.

Timoshenko, S. P. (1921). LXVI On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 41(245): 744-746.

Timoshenko, S. P. (1922). X On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 43(253): 125-131.

Touratier, M. (1991) An efficient standard plate theory. International journal of engineering science, 29(8): 901-916.

Thom, T. T., & Kien, N. D. (2018). Free vibration of two-directional FGM beams using a higher-order Timoshenko beam element. *Vietnam Journal of Science and Technology*, *56* (3), 380.

Wang, C. M., Reddy, J. N., & Lee, K. H. (Eds.). (2000) Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions. Elsevier.

Wei, D., Liu, Y., & Xiang, Z. (2012). An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks. Journal of Sound and Vibration, 331(7), 1686-1700.

Wei D., Liu Y., Xiang Z., (2012) An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks. Journal of Sound and Vibration, 331(7): 1686-1700.

Wattanasakulpong N., Gangadhara Prusty B., Kelly D.W., (2011) Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams. International Journal of Mechanical Sciences, 53(9): 734-743.

Yang J., Chen Y., (2008) Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks. Composite Structures, 83(1): 48-60.

Yesilce, Y., & Catal, S. (2009) Free vibration of axially loaded Reddy-Bickford beam on elastic soil using the differential transform method. Struct. Eng. Mech, 31(4): 453-476.

Yesilce Y., (2010) Effect of axial force on the free vibration of Reddy-Bickford multi-span beam carrying multiple spring-mass systems. Journal of Vibration and Control, 16(1): 11-32.

Yesilce, Y., & Catal, H. H. (2011) Solution of free vibration equations of semi-rigid connected Reddy–Bickford beams resting on elastic soil using the differential transform method. Archive of Applied Mechanics, 81(2): 199-213.

Ziou, H., Guenfoud, H., & Guenfoud, M. (2016) Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. International Journal of Structural Engineering, 7(3): 239-261.

ANNEXE

Elément de poutre en FGM

Les deux équations d'équilibre, pour une poutre en FGM à section transversal constante sans sollicitation, s'expriment par

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_y\right) = 0$$
$$E\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2} B \int y^2 dz + GAK_z\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_y\right) = 0 \qquad (2.31)$$

1. La Rigidité Axiale

La matrice de rigidité axiale (membrane) $[K_m]$ est :

$$[K_m] = b\int E(z)dz \begin{bmatrix} 1/L & -1/L \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} \qquad (2.32)$$

2. Elément de poutre avec cisaillement en flexion

La matrice de rigidité [K] de la poutre en flexion-cisaillement est :

$$[K] = [K_f] + [K_c] = b\int_0^l E(z)z^2dz\,[B_f]^T[B_f]dx + bK_z\int_0^l G(z)dz[B_c]^T[B_c]dx \qquad (2.33)$$

Avec

$$[B_f] = \left[\frac{dN_{\theta_y}}{dx}\right]$$

$$[B_c] = \left[\frac{dN_w}{dx}\right] - \left[N_{\theta_y}\right] = \frac{\phi_y}{2L(1+\phi_y)}[-2 \quad -L \quad 2 \quad -L]$$

$$K_f = \int E(z)z^2\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\delta\theta}{\partial x}dv^e$$

2.1. La matrice de rigidité de flexion $[K_f]$

$$[K_f] = \frac{\hat{D}_b}{(1+\phi_y)^2}\begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{(4+2\phi_y+\phi_y^2)}{L} & \frac{-6}{L^2} & \frac{(2-2\phi_y-\phi_y^2)}{L} \\ & & \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ & & & \frac{(4+2\phi_y+\phi_y^2)}{L} \end{bmatrix} \qquad (2.34)$$

2.2. La matrice de Rigidité de cisaillement $[K_c]$

$$K_c = \int G(z)\,K_y\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta\right)\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x} - \delta\theta\right)dv^e$$

$$[K_c] = \frac{{\phi_y}^2 \widehat{D}_s}{(1+\ \phi_y)^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{L} & \frac{1}{2} \\ & \frac{L}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{L}{4} \\ & & \frac{1}{L} & \frac{-1}{2} \\ & & & \frac{L}{4} \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

K_f et K_c sont les matrices de rigidités élémentaires calculées par intégration analytique suite à leurs expressions polynomiales simples, elles sont données par :

$$[K] = \frac{\widehat{D}_b}{L^3(1+\phi_y)}.$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & L^2(4+\phi_y) & -6L & L^2(2-\phi_y) \\ & & 12 & -6L \\ & & & L^2(4+\phi_y) \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

2.3. Matrice de rigidité de couplage membrane-flexion

$$K_{cp} = -\int E(z)\frac{\partial \delta u_0}{\partial x}\ z\ \frac{\partial \theta}{\partial x} dv^e$$

La matrice de couplage s'obtient à par :

$$[K_{cp}] = -\widehat{D}_{ab}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & \frac{-1}{L} \\ 0 & 0 \\ \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Par la Combinaison des différentes matrices de rigidités, nous obtenons la matrice de rigidité de l'élément poutre à deux nœuds :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{\widehat{D}_{ab}}{L} & \frac{-EA}{L} & 0 & \frac{\widehat{D}_{ab}}{L} \\ & \frac{12\widehat{D}_b}{L^3(1+\phi_y)} & \frac{6\widehat{D}_b}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{-12\widehat{D}_b}{L^3(1+\phi_y)} & \frac{6\widehat{D}_b}{L^2(1+\phi_y)} \\ & & \frac{\widehat{D}_b(4+\phi_y)}{L(1+\phi_y)} & 0 & \frac{-6\widehat{D}_b}{L^2(1+\phi_y)} & \frac{\widehat{D}_b(2-\phi_y)}{L(1+\phi_y)} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{\widehat{D}_{ab}}{L} \\ & & & & \frac{12\widehat{D}_b}{L^3(1+\phi_y)} & \frac{-6\widehat{D}_b}{L^2(1+\phi_y)} \\ & & & & & \frac{\widehat{D}_b(4+\phi_y)}{L(1+\phi_y)} \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

A Partir de l'équation d'équilibre, nous déduisons :

$$\theta_y(x) = \frac{\partial w}{\partial x} + c$$

Avec c est la constant d'intégration qui s'obtient à partir de l'équation d'équilibre

$$\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} = \frac{GAK_y c}{B \int E(z) z^2 dz} = \frac{12c}{\phi_y L^2} \qquad \phi_y = \frac{12 \int E(z) z^2 dz}{L^2 K_y \int G(z) dZ} \tag{2.39}$$

Avec $\phi_y = \frac{12B^2}{L^2 K_y D}$ et $D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$

ϕ_y est un coefficient caractérisant les déformations transversales. Il dépend des caractéristiques géométriques et mécaniques de la section.

Chapitre 3

Formulation d’un élément de coque mince triangulaire à facette plane

SOMMAIRE

Chapitre 3 : Formulation d’un élément de coque mince triangulaire à facette plane

3.1 Introduction

Le but principal de ce chapitre et du chapitre quatre est la mise au point de la formulation d’un élément fini de coque permettant de prendre en compte l’ensemble des situations rencontrées dans le calcul des structures et ouvrages en matériau à gradient fonctionnel. La première étape consiste à la formulation d’un élément de coque à facette plane basé sur le modèle en déformation, pour la modélisation des structures composées en matériaux isotropes. La deuxième étape consiste à l’adaptation de cet élément fini de coque pour modéliser des structures composées en FGM et qui sera exposée au chapitre quatre.

Les structures complexes en coques sont fréquemment rencontrées dans divers usages. Le développement d'élément fini simple et performant pour l'analyse de ces structures constitue une poussée majeure de la recherche scientifique en mécanique des solides. Les éléments finis de coque à facettes planes se dérive par superposition d'éléments de plaques avec des éléments membranaires de contraintes planes, pour lesquels les propriétés de flexion et de membrane sont découplées (pour les matériaux isotropes). Dans la littérature, il est révélé que les éléments de coque fournissent une bonne précision pour le déplacement et la contrainte des structures. Néanmoins, des problèmes sont souvent rencontrés, rendant difficile la réalisation des objectifs assignés. Cependant, si des éléments membranaires sont associés à des éléments de plaques en flexion, ils affectent la précision des résultats en raison de la pauvreté de leurs performances pour des problèmes de flexion dominante, ce qui nécessite une densité de maillage élevée et induisent des problèmes de continuité et de conformité lors de la transition vers les éléments de coque. Les principales contraintes observées sont souvent liées aux éléments suivants :

- Aspects d'incompatibilité des champs de déplacement lors du couplage des éléments de membrane avec ceux de flexion.
- Les deux phénomènes de blocage : de cisaillement transversal et de membrane.
- Les problèmes numériques induits par l'absence du sixième degré de liberté dans le cas d'éléments coplanaires.
- Les problèmes numériques associés à l'intégration numérique.

De nombreux éléments finis ont été développés pour résoudre ces problèmes. Cependant, la plupart d'entre eux sont inefficaces pour l'analyse des configurations géométriques arbitraires. Les éléments iso-paramétriques sont les plus performants parmi ceux disponibles, en raison de leur capacité à modéliser avec succès des structures courbes. De l’analyse bibliographique, certains chercheurs abordent ces problèmes. Bhothikhun et Dechaumphai (2014) ont développé un élément triangulaire de plaque de Kirchhoff discret (DKT) couplé avec l’élément de membrane CST avec maillage adaptatif. Ce dernier est utilisé pour améliorer la

précision de la solution et réduire l'effort de calcul. Les formulations de l'élément triangulaire (THS) et de l'élément quadrilatéral (QHS) basées sur le principe de la variation hybride et la solution homogène analytique de l'équation de la plaque mince ont été obtenues par Rezaiee-Pajand et Karkon (2014). Jeon et al. (2014) présentent une amélioration d'un schéma d'enrichissement de l'élément fini de coque triangulaire MITC à trois nœuds par des fonctions de recouvrement d'interpolation. Ce schéma d'amélioration augmente la précision de la solution sans raffinement du maillage local traditionnel. Rezaiee-Pajand et Yaghoobi (2014) ont développé un nouvel élément triangulaire, nommé SST10. Sa formulation utilise les contraintes d'optimisation de l'insensibilité à la distorsion et à l'invariance rotationnelle. De plus, les équations d'équilibre sont établies en fonction de certaines conditions sur les états de déformations. Des éléments finis quadrilatéraux de membrane avec degrés de liberté de rotation ont été développés par Kugler et al. (2010), Boutagouga (2008, 2016) et Hamadi (2016). Ils sont basés sur un principe de variation utilisant un champ de rotation indépendant autour de la normale. D'autres études sur l'élément fini triangulaire ont été publiées : Sabir (1985), Barik et Mukhopadhyay (2002), Kim et Bathe (2009), Papanicolopulos et al. (2009), Burkardt (2010), Serpik (2010), Huang et al. (2010), Gileva et al. (2013) et Himeur (2008, 2015). De la même manière Batoz et Dhatt, en 1990, ont développé des éléments finis triangulaire de membrane avec trois et six nœuds appelés T3 (CST) et T6. Belarbi (2000) a également développé de nombreux éléments finis triangulaires, à savoir les SBT2, SBT2ν, SBT3 et SBT3ν. Chinosi (2005) a apporté plusieurs modifications aux conditions aux limites pour les plaques de Mindlin-Reissner.

Récemment, Shin et Lee (2014) ont développé un élément triangulaire de coque à facette plane à trois nœuds basé sur la formulation en déformation déviatoire naturelle imposée pour une utilisation améliorée dans des structures de coques à géométrie courbe. La technique de l'approche en déformation est appliquée au développement de la rigidité de membrane de l'élément en question.

Le but de la présente recherche, sujet du chapitre trois, est de surmonter le problème qui apparaît lors de la combinaison d'éléments de membrane de classe C° avec des éléments de plaque de classe C^1. Par conséquent, la finalité de ce travail est la formulation d'un élément fini de coque mince à facette plane basé sur l'approche en déformation; dont le raisonnement est d'éviter ces difficultés d'une part et la construction d'un élément fini de coque à facette plane simple et compétent pour l'analyse de structures complexes, d'autre part. Pour ce faire, nous avons enrichi notre approche avec les concepts et le développement des techniques basées sur :

- l'adoption de l'approche en déformation,

- l'introduction d'un "quatrième nœud fictif",

- l'élimination des degrés de liberté correspondant au "quatrième nœud fictif" par condensation statique,

- l'utilisation de "l'intégration analytique" pour évaluer la matrice de rigidité.

Dernièrement, Himeur et Guenfoud (2008, 2015) ont développé un élément fini de membrane triangulaire, pouvant être facilement couplé avec un élément en flexion (plaque, poutre et coque). Baptisé "T43_Eq" (Himeur et Guenfoud 2008, 2015) est un élément fini triangulaire de membrane à quatre nœuds dont un nœud positionné au centre de l'élément. Il se caractérise par la présence de la rotation autour de la normale, pour chaque nœud, définie par la dérivation des champs de déplacement (Drilling rotation). Les fonctions d'interpolation, des champs des déformations et par conséquent des déplacements et des contraintes, sont développées à partir des conditions d'équilibre (Polynômes bi-harmoniques choisis parmi les solutions données par (Teodorecu 1982) à partir du développement de la fonction Airy). Ces fonctions d'interpolation sont développées en utilisant le triangle de Pascal. L'élément, "T43_Eq" est un élément de membrane ayant trois nœuds positionnés au sommet du triangle et un quatrième nœud fictif situé au centre du triangle, tous possédant trois degrés de liberté (U et V et la rotation autour de la normale θ_z). Les degrés de liberté du quatrième nœud sont ensuite éliminés de la matrice de raideur élémentaire par condensation statique. La valeur principale de ce nœud fictif 'esclave' réside dans l'amélioration du champ de déplacement (raffinement P, c'est-à-dire augmentation du degré d'interpolation polynomiale), ce qui conduit à une meilleure précision dans l'approximation de la solution. Le principe variationnel utilisé est celui du principe du travail virtuel. L'intégration analytique pour évaluer la matrice de rigidité est extrêmement intéressante afin d'éviter l'insuffisance de la convergence observée lors de l'utilisation de l'intégration numérique dans les éléments iso-paramétriques.

L'élément fini triangulaire de plaque en flexion possédant un quatrième nœud fictif (esclave) basé sur l'approche en déformation développée par Himeur et Guenfoud (2011) est utilisé pour construire l'élément de coque actuel. Cet élément est formulé sur la base de l'approche en déformation. Les fonctions d'interpolation des champs de déformations (par conséquent, les déplacements et les contraintes) sont développées en utilisant le triangle de Pascal. L'élément considéré est un élément triangulaire auquel nous avons ajouté un quatrième nœud fictif positionné à l'extérieur du triangle. Cette position, à l'extérieur, est donc choisie pour éviter la relaxation de la matrice de raideur entraînant un excès d'estimation des déplacements nodaux. Les degrés de liberté correspondant au quatrième nœud sont ensuite éliminés par la condensation statique de la matrice de rigidité au niveau élémentaire. L'intérêt

principal de ce nœud fictif réside donc dans l'amélioration du champ de déplacement (raffinement P, c'est-à-dire augmentation du degré d'interpolation polynomiale), visant une meilleure précision dans l'approximation de la solution. Le critère variationnel correspondant est le principe du travail virtuel. L'utilisation de l'intégration analytique pour l'évaluation de la matrice de rigidité est très intéressante pour éviter le phénomène de perte de convergence observé dans les éléments iso-paramétriques utilisant l'intégration numérique et qui sont très sensibles (leurs convergence est formée par un maillage régulier non déformé). L'hypothèse cinématique de la présente formulation est celle de la théorie des plaques minces (théorie de Kirchhoff) dont laquelle l'énergie due au cisaillement transversal est négligée.

3.2. Formulation de l'élément de membrane (Four Node Triangular Element "T43_Eq")

L'élément membranaire, désigné par T43_Eq, est formulé en utilisant l'approche en déformation par Himeur et Guenfoud (2008). Les fonctions d'interpolation des champs de déformations, et donc des déplacements et des contraintes, sont développées depuis les conditions d'équilibre. La figure 3.1 présente cet élément. Chaque nœud a trois degrés de liberté : deux translations U et V et la rotation autour de la normale ("drilling rotation") θz. Par conséquent, les champs de déplacement ont douze constantes (4 nœuds x 3DDL=12) indépendantes (a_1, ..., a_{12}). Les relations entre les déformations et les déplacements sont données comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \tag{3.1}$$

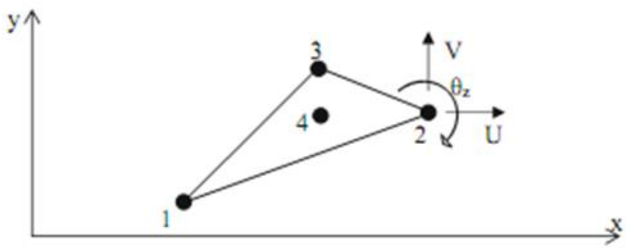


Figure 3.1 Elément triangulaire membranaire à quatre noeuds "T43_Eq"
Et à trois DDL par nœud (deux translations u et v et la rotation θ_z)

La vraie rotation autour de la normale, (la "Drilling rotation") θ_z, est donnée par la relation :

$$\theta_z = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \tag{3.2}$$

Les conditions d'équilibre en état plan de contraintes sont données par le système suivant:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

En état de contraintes planes, les relations entre les déformations et les contraintes sont données par les équations suivantes (loi de Hooke pour les matériaux isotropes):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \text{Et} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Pour des forces de volume (nulles), les fonctions d'approximation sont développées en introduisant la fonction d'Airy F(x, y) qui réduit le problème de la relation (3.3) en une seule équation bi-harmonique. Himeur et Guenfoud (2015):

$$\nabla^4 F(x, y) = 0 \quad (3.5)$$

Avec

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (3.6)$$

Si nous substituons l'équation (3.6) dans les systèmes d'équation (3.4), les déformations deviennent comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} - \nu . \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} \right) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(-\nu \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} \right)$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{1}{G} . \left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.7)$$

Par conséquent, la solution universelle de l'équation (3.5) se base sur les polynômes bi-harmoniques. Ainsi, ces fonctions sont le point de départ pour obtenir la contrainte, la déformation et le déplacement. Zweiling (1952) a déterminé ces polynômes bi-harmoniques. Pour exprimer l'approximation du champ de déformation, on utilise les douze premiers polynômes bi-harmoniques comme suit :

- Pour les mouvements de solide rigide (MSR), les déformations sont nulles. Donc :

$$\varepsilon_x = 0 \qquad \varepsilon_y = 0 \qquad \gamma_{xy} = 0 \quad (3.8)$$

En ce qui concerne les modes supérieurs nous avons que :

$$\begin{cases} E.\varepsilon_x = a_4 - 2.a_7.\nu.y + 2a_8.x - 6.a_9\nu.x + 6.a_{10}y - 6a_{11}.\nu.x.y + 6.a_{12}.x.y \\ E.\varepsilon_y = a_5 + 2.a_7.y - 2.a_8.\nu\nu. + 6a_9.x - 6.a_{10}.\nu\nu. + 6a_{11}.x.y - 6a_{12}.\nu.x.y \\ E.\gamma_{xy} = 2.a_6 - 4.a_7(1+\nu)x - 4.a_8(1+\nu)y - 6.a_{11}(1+\nu)x^2 - 6.a_{12}(1+\nu)y^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

Le champ résultant se caractérise par :

- L'existence de déformations constantes garantissant la convergence et la déformation homogène lorsque le maillage est affiné, représentées par les constantes a_4, a_5 et a_6.
- L'existence des déformations linéaires de dilatations (ε_x, ε_y) et un état de déformation linéaire de distorsion (γ_{xy}) (Cisaillement dans le plan), correspondant aux paramètres a_7,… a_{10} mettant en dépendance les distorsions aux dilatations.
- Les déformations dues aux modes supérieurs sont pris en considération à travers les paramètres a_{11}, a_{12} ;

L'équation universelle de compatibilité des déformations s'écrit ;

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = 0 \quad (3.10)$$

L'approbation de l'équation universelle de compatibilité des déformations vérifiée par la fonction d'Airy s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}\right)\right) \Rightarrow \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial y^4} - \nu\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\right) \\ &\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}\right)\right) \Rightarrow \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^4} - \nu\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\right) \\ &-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{2(1+\nu)}{E}\left(-\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}\right)\right) \Rightarrow \frac{2(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\right) \\ &\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\right) = \frac{1}{E}\nabla F^4(x,y) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Finalement, l'intégration des champs de déformations fournit les champs de déplacement en dessous :

$$\begin{cases} E.u = a_1 - a_3.y + a_4.x + a_6.y - 2.a_7.\nu.x.y + a_8.(x^2 - y^2(2+\nu)) - 3.a_9(\nu.x^2 + y^2) \\ \quad + 6.a_{10}x.y - a_{11}.(3.\nu.x^2.y + y^3) + a_{12}.(3.x^2.y - y^3(2+\nu)) \\ E.v = a_2 + a_3.x + a_5.y + a_6.x + a_7.(y^2 - x^2(2+\nu)) - 2.a_8.\nu.x.y + 6a_9.x.y \\ \quad - 3.a_{10}.(\nu.y^2 + x^2) + a_{11}.(3.x.y^2 - x^3.(2+\nu)) - a_{12}.(3.\nu.x.y^2 + x^3) \\ E.\theta_z = a_3 - 2.a_7.x + 2.a_8.y + 6.a_9.y - 6.a_{10}.x + 3.a_{11}(y^2 - x^2) + 3a_{12}(y^2 - x^2) \end{cases} \tag{3.12}$$

Sous forme matricielle, le champ de déplacement résultant représenté par l'équation (3.12) devient

$$\begin{Bmatrix} u(x.y) \\ v(x,y) \\ \theta_z(x,y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\left[f(x.y)\right].\left\{a_i\right\} \tag{3.13}$$

Avec: $\left\{a_i\right\}^T = < a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} >$

$$\left[f(x,y)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & 0 & y & -2\nu xy & (x^2 - y^2(2+\nu)) & -3(\nu x^2 + y^2) & 6xy & (-3\nu x^2 y - y^3) & (3x^2 y - y^3(2+\nu)) \\ 0 & 1 & x & 0 & y & x & (y^2 - x^2(2+\nu)) & -2\nu xy & 6xy & -3(\nu y^2 + x^2) & (3y^2 x - x^3(2+\nu)) & (-3\nu y^2 x - x^3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2x & 2y & 6y & -6x & 3(y^2 - x^2) & 3(y^2 - x^2) \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Ayant les quatre coordonnées nodales (x_j, y_j) correspondant au nœud j (j = 1, ..., 4) et affectant la relation (3.13), le vecteur nodal de déplacements au niveau élémentaire s’obtient par :

$$\left\{q^e\right\} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} \left[f(x_1.y_1)\right] \\ \left[f(x_2.y_2)\right] \\ \left[f(x_3.y_3)\right] \\ \left[f(x_4.y_4)\right] \end{bmatrix}\left\{a_i\right\} \tag{3.15}$$

Avec $\left\{q^e\right\}^T = < u_1, v_1, \theta_{z_1}, u_2, v_2, \theta_{z_2}, u_3, v_3, \theta_{z_3}, u_4, v_4, \theta_{z_4} >$ et $\frac{1}{E}\begin{bmatrix} \left[f(x_1.y_1)\right] \\ \left[f(x_2.y_2)\right] \\ \left[f(x_3.y_3)\right] \\ \left[f(x_4.y_4)\right] \end{bmatrix}$ est la matrice

élémentaire des coordonnées nodales qu’on la note par [A].

Himeur et Guenfoud (2008, 2008, 2015) détaillent le développement de la matrice [A] pour l'élément fini "T43_Eq". Enfin, nous obtenons les fonctions d'interpolation des déplacements à partir de l'équation (3.15) par l'évaluation des paramètres 'a_i' en fonction des coordonnées nodales.

$$\{a_i\} = [A]^{-1}\{q^e\} \tag{3.16}$$

En substituant l'équation (3.16) dans l'équation (3.14), nous obtenons la relation entre le vecteur des déplacements et les déplacements nodaux par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} u(x.y) \\ v(x, y) \\ \theta_z(x, y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\left[f(x.y)\right].[A]^{-1}\left\{q^e\right\} \tag{3.17}$$

$\frac{1}{E}\left[\ f(x.y)\ \right].[A]^{-1} = [N]$ de taille 3x12 représente la matrice des fonctions de forme.

Dans le cas de l'état plan des contraintes, le tenseur de déformation de Green linéarisé représentant les relations déformations-déplacements est donné par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \tag{3.18}$$

En remplaçant u et v par leurs valeurs de l'équation (3.17), les relations déformations-déplacements de l'équation (3.18) prennent la forme suivante :

$$E.\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2\nu\nu & 2x & -6\nu\nu & 6y & -6\nu\nu x & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & -2\nu\nu & 6x & -6\nu\nu & 6xy & -6\nu\nu x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4x(1+\nu) & -4y(1+\nu) & 0 & 0 & -6x^2(1+\nu) & -6y^2(1+\nu) \end{bmatrix} . \{q_e\} \tag{3.19}$$

Par conséquent, la matrice de déformation prend la forme :

$$[Q] = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2\nu\nu & 2x & -6\nu\nu & 6y & -6\nu\nu x & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & -2\nu\nu & 6x & -6\nu\nu & 6xy & -6\nu\nu x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4x(1+\nu) & -4y(1+\nu) & 0 & 0 & -6x^2(1+\nu) & -6y^2(1+\nu) \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

3.3. L'élément de plaque

3.3.1 Les équations fondamentales de la théorie des plaques minces (Théorie de Kirchhoff)

3.3.1.1 Les équations de la cinématique des plaques minces et les conditions de compatibilité

La figure 3.2 présente les rotations autour des deux axes x et y désignées par θ_x et θ_y respectivement et les pentes (gradients) dans les deux directions définies par les variables β_x et β_y; avec:

$$\beta_x = \theta_y \qquad\qquad \beta_y = -\theta_x \tag{3.21}$$

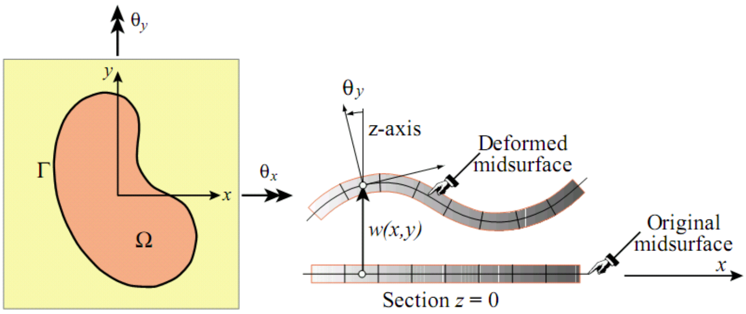


Figure 3.2 Déformation d'une plaque en flexion (Théorie de Kirchhoff)

L'hypothèse de la section transversale plane avant transformation reste plane après transformation, engageant ainsi une variation linéaire du déplacement à travers l'épaisseur de la plaque, se traduit par la relation (3.22).

$$u(x,y,z) = z\beta_x(x,y) = z\theta_y(x,y) \quad v(x,y,z) = z\beta_y(x,y) = -z\theta_x(x,y) \quad w(x,y,z) = w(x,y) \tag{3.22}$$

Les trois expressions de l'équation (3.22) permettent de relier les déplacements membranaires (u, v) et le déplacement transversal de flexion (w) en référence à l'hypothèse de Kirchhoff. Le champ de déplacement final nécessaire pour décrire le comportement de la plaque devient :

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} \qquad\qquad v = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.23}$$

Les relations entre les rotations, les courbures et les pentes sont données par:

$$-\theta_x = \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \qquad\qquad \theta_y = \beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.24}$$

Le tenseur de déformation infinitésimal s'obtient par dérivation du champ de déplacements, ce qui nous donne :

$$\begin{gathered} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z\frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad\qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z\frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x}) = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{gathered} \tag{3.25}$$

Avec $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, suite aux hypothèse de Kirchhoff.

Les relations entre les moments de flexion et les courbures s'expriment par :

$$K_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad K_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad K_{xy} = (\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x}) = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{3.26}$$

Afin d'assurer l'unicité de la solution, Saint-Venant en (1854) a établi les conditions de compatibilité. Dans le cas des plaques minces elles s'écrivent comme suit :

$$\frac{\partial^2 K_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 K_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial x}=2\frac{\partial K_x}{\partial y}$$
$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial y}=2\frac{\partial K_y}{\partial x} \tag{3.27}$$

3.3.1.2 Lois Constitutive

La loi de comportement, dans le cas de l'état plan des contraintes et pour un matériau isotrope, s'écrit :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

L'équation (3.28) s'écrit en termes de relation moments-courbures par :

$$\begin{Bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}K_x\\ K_y\\ K_{xy}\end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{Bmatrix} \tag{3.29}$$

3.3.1.3 Les équations d'équilibre

L'équilibre entre les actions internes et externes d'un élément de plaque, figure 3.3, de dimension dx×dy s'écrit :

$$q\,dxdy+(Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial x}dx)dy+(Q_y+\frac{\partial Q_y}{\partial y}dy)dx-Q_x dy-Q_y dx=0 \tag{3.30}$$

Où Q_x et Q_y sont les efforts tranchants (les forces de cisaillement transversal) dans les sections, perpendiculaires aux axes x et y respectivement; l'expression (3.30) se simplifie pour devenir :

$$q+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=0 \tag{3.31}$$

L'équilibre rotationnel des moments autour des axes x et y fournit :

$$Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \qquad Q_y=\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \tag{3.32}$$

En substituant les valeurs de Qx et Qy exprimés par les équations (3.32) dans l'équation (3.31) et en utilisant la loi de comportement de flexion (3.29), la condition d'équilibre se traduise en fonction du déplacement transversal "w" par la relation suivante :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{q}{D}=0 \tag{3.33}$$

Avec $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$

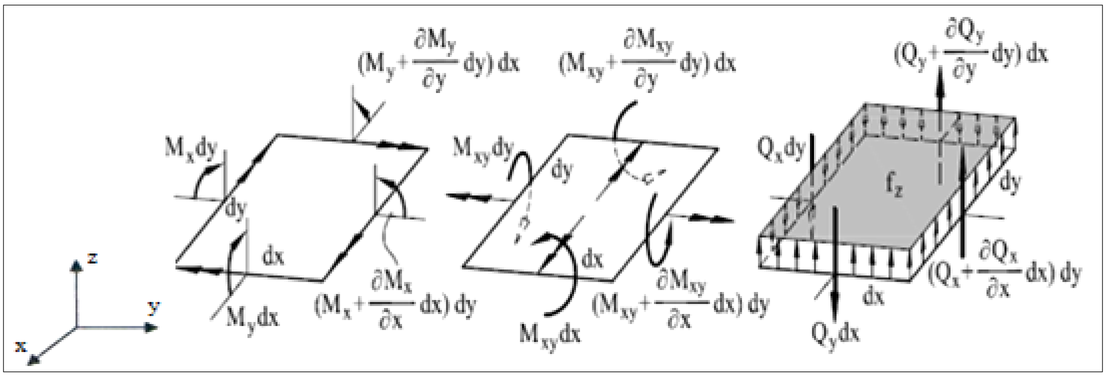


Figure 3.3 Equilibre des forces et des moments sur un élément de plaque

3.3.2 L'élément fini de plaque mince développé par Himeur et Guenfoud

3.3.2.1 Les fonctions de forme

Pour les mouvements de solide rigide (MSR), les courbures sont égales à zéro

$$\kappa_x = 0 \qquad \kappa_y = 0 \qquad \kappa_{xy} = 0 \tag{3.34}$$

En changeant les courbures avec leurs valeurs données par les équations (3.34) dans les équations (3.26) et ensuite par intégration, nous obtenons les champs de déplacement correspondant aux mouvements de corps rigides, qui sont donnés par :

$$w = a_1 - a_2.x - a_3 y \quad \beta_x = a_2 \quad \beta_y = a_3 \tag{3.35}$$

Avec a_2 et a_3, les paramètres liés aux rotations θ_x et θ_y du corps rigide autour des axes "y" et "x" respectivement et a_1 (le déplacement transversal) du corps rigide selon la normale (axe "z") lié à la translation transversale.

L'élément possède quatre nœuds (Figure 3.4) : trois en tête du triangle auxquelles nous rajoutons un quatrième nœud virtuel (auxiliaire). Tous les nœuds ont trois degrés de liberté. Les champs des déplacements, exprimés par l'utilisation du modèle en déformation, nécessitent donc douze paramètres indépendants (a_1, ..., a_{12}). Les trois premiers (a_1, a_2, a_3) sont utilisés dans (3.35) pour représenter les mouvements du solide rigide (MSR). Les neuf restants (a_4, ..., a_{12}) sont utilisés pour caractériser l'état de flexion pure. Ils interviennent dans les fonctions d'interpolation de déformation pour satisfaire les relations (3.27) de compatibilité cinématique

pour l'élasticité plane et les équations d'équilibre. Par conséquent, les champs de courbure de flexion pour les modes supérieurs dérivant du triangle de Pascal sont :

$$\kappa_x = a_4 + a_5.x + a_6.y + a_7.x.y \qquad \kappa_y = a_8 + a_9.x + a_{10}.y + a_{11}x.y$$
$$\kappa_{xy} = a_{12} + 2.a_6.x + a_7.x^2 + 2.a_9.y + a_{11}.y^2 \tag{3.36}$$

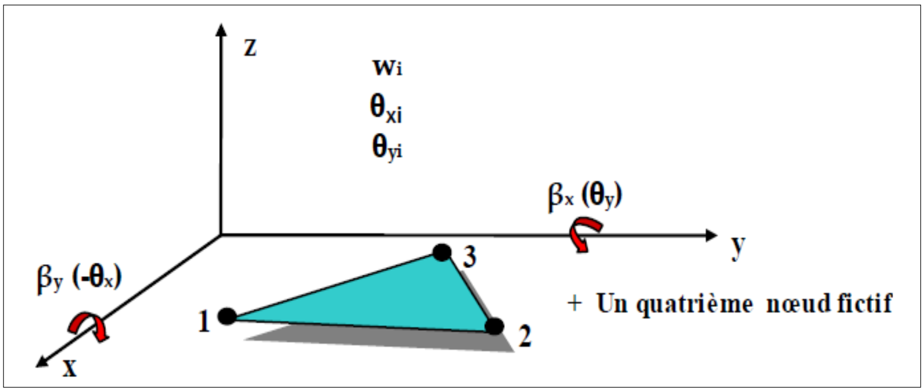


Figure 3.4 Elément triangulaire de plaque mince avec trois degrés de liberté par nœud

En substituant, dans les relations (3.26), les courbures avec leurs valeurs données par les équations (3.36) et en intégrant les équations résultantes, on obtient le champ de déplacements du mode de flexion pure :

$$W = -a_4.\frac{x^2}{2} - a_5.\frac{x^3}{6} - a_6.\frac{x^2.y}{2} - a_7.\frac{x^3.y}{6} - a_8.\frac{y^2}{2} - a_9.\frac{x.y^2}{2} - a_{10}.\frac{y^3}{6} - a_{11}.\frac{x.y^3}{6} - a_{12}.\frac{x.y}{2}$$
$$\beta_x = a_4.x + a_5.\frac{x^2}{2} + a_6.x.y + a_7.\frac{x^2.y}{2} + a_9.\frac{y^2}{2} + a_{11}.\frac{y^3}{6} + a_{12}.\frac{y}{2} \tag{3.37}$$
$$\beta_y = a_6.\frac{x^2}{2} + a_7.\frac{x^3}{6} + a_8.y + a_9.x.y + a_{10}.\frac{y^2}{2} + a_{11}.\frac{x.y^2}{2} + a_{12}.\frac{x}{2}$$

En additionnant les relations (3.35) et (3.37), on obtient le champ de déplacement final (correspondant aux mouvements du solide rigide et à la déformation pure en flexion) :

$$W = a_1 - a_2.x - a_3.y - a_4.\frac{x^2}{2} - a_5.\frac{x^3}{6} - a_6.\frac{x^2.y}{2} - a_7.\frac{x^3.y}{6} - a_8.\frac{y^2}{2} - a_9.\frac{x.y^2}{2} - a_{10}.\frac{y^3}{6} - a_{11}.\frac{x.y^3}{6} - a_{12}.\frac{x.y}{2}$$
$$\beta_x = a_2 + a_4.x + a_5.\frac{x^2}{2} + a_6.x.y + a_7.\frac{x^2.y}{2} + a_9.\frac{y^2}{2} + a_{11}.\frac{y^3}{6} + a_{12}.\frac{y}{2} \tag{3.38}$$
$$\beta_y = a_3 + a_6.\frac{x^2}{2} + a_7.\frac{x^3}{6} + a_8.y + a_9.x.y + a_{10}.\frac{y^2}{2} + a_{11}.\frac{x.y^2}{2} + a_{12}.\frac{x}{2}$$

Le champ de déplacement donné par les équations (3.38) s'écrit sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} W(x,y) \\ \beta_x(x,y) \\ \beta_y(x,y) \end{Bmatrix} = [f(x,y)]\{a_i\} \tag{3.39}$$

Avec :

$$\{a_i\}^T = < a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} >$$

Et

$$[f(x,y)] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{6} & -\frac{x^2.y}{2} & -\frac{x^3.y}{6} & -\frac{y^2}{2} & -\frac{x.y^2}{2} & -\frac{y^3}{6} & -\frac{x.y^3}{6} & -\frac{x.y}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & \frac{x^2}{2} & x.y & \frac{x^2.y}{2} & 0 & \frac{y^2}{2} & 0 & \frac{y^3}{6} & \frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{6} & y & x.y & \frac{y^2}{2} & \frac{x.y^2}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

Le vecteur élémentaire des déplacements nodaux correspondant aux nœuds j (j = 1 ... 4), s'obtient en appliquant la relation (3.40) après connaissance des coordonnées nodales (x_j, y_j) :

$$\{q^e\} = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{bmatrix} \{a_i\} \tag{3.41}$$

Avec, $\{q^e\}^T = < w_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, w_2, \beta_{x2}, \beta_{y2}, w_3, \beta_{x3}, \beta_{y3}, w_4, \beta_{x4}, \beta_{y4} >$ *et* $[A] = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{bmatrix}$

L'expression détaillée de la matrice des coordonnées nodales se trouve dans Himeur et Guenfoud (2011) en Annexe.

A partir de la relation (3.41), nous recueillons les valeurs des paramètres "a_i" par le système suivant:

$$\{a_i\} = [A]^{-1}\{q^e\} \tag{3.42}$$

En remplaçant les paramètres exprimés par la relation (3.42) dans le système d'équation (3.39), on obtient la relation reliant le vecteur de déplacement au vecteur des déplacements nodaux :

$$\begin{Bmatrix} W(x, y) \\ \beta_x (x, y) \\ \beta_y (x, y) \end{Bmatrix} = \left[f(x, y)\right].[A]^{-1}.\left\{q^e\right\} \tag{3.43}$$

Donnant ainsi la matrice des fonctions d'interpolation N_i pour le présent élément de plaque mince de Kirchhoff.

En remplaçant dans les équations (3.26), w (x, y) par les valeurs de l'équation (3.39), La relation déformation-déplacement prend la forme développée suivante

$$\{K\} = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.x & x^2 & 0 & 2.y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix} . \left\{a_i\right\} \tag{3.44}$$

Finalement, la matrice de déformation [Q(x, y)] de l'élément de plaque en question s'obtient par : ([K] = [Q (x, y)] {a_i}):

$$\left[Q(x, y)\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.x & x^2 & 0 & 2.y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

3.4. Les matrices de rigidité élémentaire pour les deux éléments (membrane et plaque en flexion)

Le travail virtuel interne élémentaire discrétisé s'exprime par :

$$\left(\delta W_{int}\right)^e = \int_{V^e} \{\delta\varepsilon\}^T . \{\sigma\} . dV \tag{3.46}$$

Sachant que :

$$\{\varepsilon\} = \left[N'\right] . \left\{q^e\right\} = \left[Q(x, y)\right] . [A]^{-1} \left\{q^e\right\} \tag{3.47}$$

Et
$$\{\sigma\} = \left[D\right] . \{\varepsilon\} \tag{3.48}$$

De plus, la substitution dans l'expression (3.46) de $\{\varepsilon\}$ et $\{\sigma\}$ par leurs valeurs données respectivement dans les équations (3.47) et (3.48) produit :

$$\left(\delta W_{int}\right)^e = \delta\left\{q^e\right\}^T \int_V [A^{-1}]^T . \left[Q(x, y)\right]^T . [D] . \left[Q(x, y)\right] . [A]^{-1} \left\{q^e\right\} dV \tag{3.49}$$

Par conséquent, on obtient la matrice de rigidité élémentaire dérivée de l'expression (3.49), à la fois pour les éléments de membrane et de flexion en utilisant l'intégration sur le volume de l'élément :

$$[K^e] = \int_V [A^{-1}]^T . [Q(x,y)]^T . [D] . [Q(x,y)] . [A]^{-1} dV \tag{3.50}$$

L'expression (3.50) peut s'écrire comme suit :

$$[K^e] = [A^{-1}]^T \int_V [Q(x,y)]^T [D] . [Q(x,y)] . dV . [A]^{-1} = [A^{-1}]^T [K_0] . [A]^{-1} \tag{3.51}$$

L'évaluation de l'expression de $[K_0]$ se détermine par intégration analytique Belarbi (1999), Hamadi (2006), Himeur (2008), des différents composants du produit matriciel résultant $[Q(x,y)]^T [D].[Q(x,y)]$. Dont leurs expressions prennent la forme " $H_{\alpha\beta} = C.x^{\alpha}.y^{\beta}$ ". Pour plus de détails voir l'annexe IV.

En conclusion, la matrice de rigidité élémentaire, à considérer lors de l'assemblage et de la construction de la matrice de rigidité globale de la membrane et de la plaque en flexion, est acquise après condensation de la matrice $[K_e]$. La condensation statique concerne les degrés de liberté du quatrième nœud fictif, Himeur et Guenfoud (2008, 2008, 2011, 2014 et 2015) et Guenfoud (2018).

3.5. L'élément de coque

Le présent élément est un élément de coque mince à facette plane, obtenu en superposant l'élément de membrane 'T43_Eq' Himeur and Guenfoud (2008) avec l'élément fini de plaque mince Himeur and Guenfoud (2011). Pour le cas de matériau isotrope, nous obtenons sa matrice de rigidité élémentaire en ajoutant la matrice de raideur de l'élément de membrane à celle de l'élément de flexion sans effet de couplage Guenfoud (2018). Nous décrivons l'approche utilisée avec ses fondements comme suit :

* Nous approximons la géométrie réelle de la structure par des éléments à facettes planes (Figure 3.5), donc nous négligeons les courbures sur l'élément et par conséquent nous évitons le blocage de la membrane.

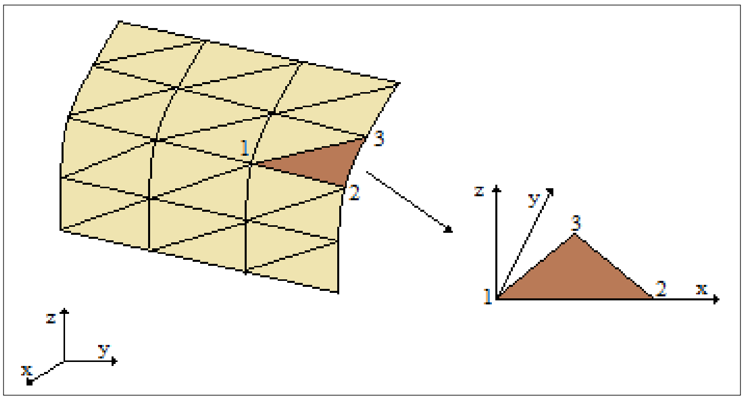
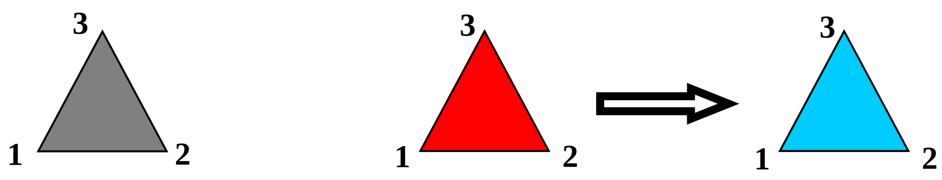


Figure 3.5 Elément de plaque mince dans les deux référentiels (global et local)

* Nous utilisons un élément de membrane couplé à celui d'un élément de plaque en flexion (Figure 3.6).



Elément Membranaire	Elément de plaque mince	Coque à facette plane
9 DDL	9 DDL	18 DDL
$\{u_1 \quad v_1 \quad \theta z_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta z_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad \theta z_3\}^T$	$\{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3}\}^T$	18 DDL
T43_Eq	Elément de plaque mince	Elément de coque

Figure 3.6 Mode de construction de l'élément de coque

* L'élément de coque peut avoir n'importe quelle orientation dans le système de coordonnées global XYZ (Figure 3.5).
* Le passage des coordonnées locales aux coordonnées globales, pour l'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire dans le système global, se fait à travers la matrice de rotation $[R_0]$ comme suit : (3.52)

$$\left[K_e\right]_g = \left[R_0\right]^T \left[K_e\right]_l \left[R_0\right] \qquad (3.52)$$

* Nous réarrangeons les termes de la matrice de rigidité locale (18x18) avant assemblage comme sur la Figure 3.7.
Avec:
Terme de rigidité de membrane
Terme de rigidité de flexion
Nous levons la difficulté associée à l'absence de la rigidité autour de θ_z, dans la formulation de l'élément membranaire, en introduisant la vraie rotation autour de la normale «Driling rotation» dans la construction de la matrice de rigidité élémentaire.

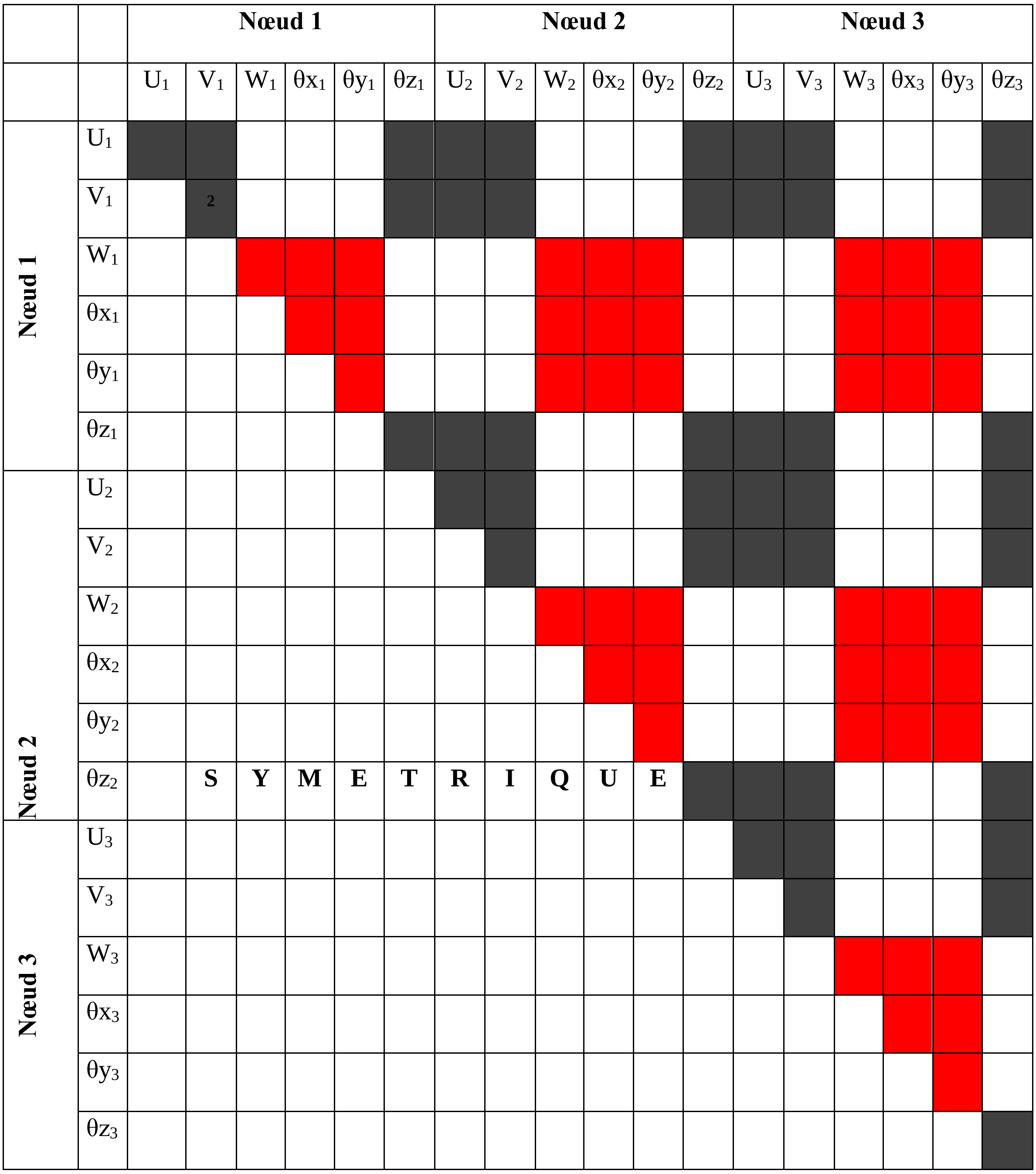


Figure 3.7 Structure type de la matrice de rigidité élémentaire dans le repère local [Ke]

3.6. Validation de l'élément coque – cas de matériau isotrope-

Nous examinons un certain nombre de problèmes de référence, couramment utilisés par les chercheurs, pour comparer le présent élément avec d'autres se trouvant dans la littérature afin de mettre en valeur sa précision relative et sa convergence. Nous récapitulons comme suit les éléments finis utilisés dans les comparaisons :

Nom de l'élément fini	Description de l'élément
ANST3	Elément fini de coque triangulaire à trois nœuds basé sur les déformations covariantes imposées Guenfoud (1990).
ANST6	Elément fini de coque triangulaire à six nœuds basé sur les déformations covariantes imposées Guenfoud (1990).
ECB1	Elément fini de coque triangulaire basé sur la théorie des coques profonde Geoffroy (1983)
ECB2	Elément fini de coque triangulaire basé sur la théorie des coques surbaissé Geoffroy (1983)
DKTM	Elément fini surbaissé de coque mince à trois nœuds basé sur la théorie de coque surbaissée de Marguerre El-Khaldi (1987).
DSTCOQ	Elément fini de coque à facette plane Guenfoud (1996, 2000).
DSTM	Elément fini de coque épaisse à trois nœuds basé sur la théorie de de coque surbaissée de Marguerre Guenfoud (1996, 2000).
DKT12	(CST+DKT6) Batoz (1990).
DKT18	(CST+DKT9) Batoz (1990).
DLR18	Carpenter (1986).
ACM_RSBES	ACM_RSBES : Hamadi (2016).
ACM_SBQ4	ACM_SBQ4 : Belarbi (2000).

3.6.1 Analyse spectrale de la matrice de rigidité élémentaire

L'évaluation des valeurs propres de la matrice de rigidité du présent élément est réalisée sur différentes formes d'éléments. En effectuant l'analyse spectrale de la matrice de rigidité du présent élément, nous révélons six valeurs propres nulles associées aux six modes de déformations du solide rigide requis. Aucun mode d'énergie parasite nulle n'est présent, comme on aura s'y attendre d'une matrice de rigidité intégrée analytiquement et exactement. Par conséquent, la matrice de rigidité a un rang correct et l'élément est considéré comme cohérent sur le plan cinématique.

3.6.2 Patch Test

3.6.2.1 Patch test standard de Kirchhoff

Nous considérons le patch test standard de plaque de Kirchhoff décrit comme sur la figure 3.8. Une plaque mince rectangulaire, soumise à un état de flexion, de sorte que tous les résultats des trois moments soient constants sur tout le domaine de la plaque. La plaque est

discrétisé en quatre éléments géométriquement distincts, produit des valeurs exactes des trois moments et elles sont constantes sur tous les points de l'élément.

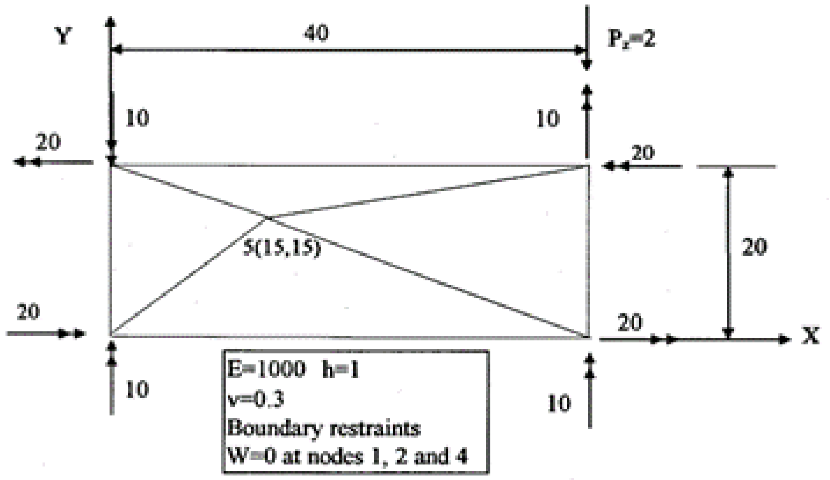


Figure 3.8 Patch-test standard de Kirchhoff

3.6.2.2 Flexion inextensible

Afin d'étudier le problème de blocage (le verrouillage) de membrane, nous considérons une plaque rectangulaire initialement courbe soumise à une flexion constante. Dans le premier cas, la flèche initiale est donnée par l'expression $W_0 = \frac{4Hx}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$, tandis que pour le second cas elle est exprimé par W_0=Hxy/BL. Nous analysons le test pour une épaisseur H= 0.1 et 1. La solution analytique, selon la théorie des coques surbaissée de Marguerre, est donnée par Guenfoud (1993). Dans tous les cas, l'erreur sur l'évaluation de l'énergie de déformation est inférieure à 1,1%. La contrainte maximale de membrane est égale à 2,9% de la contrainte de flexion pour H=1 et inférieure à 1,1% de la contrainte de flexion pour H=0,1. Nous restreignons que l'élément ne se verrouille pas. Si nous n'avons pas fait une attention particulière au verrouillage de la membrane, les résultats seraient très modestes.

3.6.3 Cylindre pincé à bords libres

Le cylindre pincé à bords libres est un problème classique qui a été largement utilisé pour vérifier la capacité des éléments de coque à représenter une déformation inextensionnelle dans le cas de flexion. C'est un exemple à utilisation courante dans la littérature. En effet, depuis 1967, il a toujours servi aux chercheurs, Thomas (1975), Zienkiewicz (1977), Batoz (1977), Geoffroy (1983), Carpenter (1986), Guenfoud (1990, 1996), Guenfoud (2018), pour évaluer la performance de la convergence des éléments finis de coque d'une part et de vérifier la représentation du mouvement du corps rigide d'autre part. Le test concerne l'analyse d'un cylindre pincé isotrope à bords libres se trouvant à la figure 3.9. Les extrémités libres du

cylindre conduit à une déformation de flexion pure sans extension lorsque h/R se rapproche de zéro. Pour le présent exemple, nous avons h/R=0,0031 et h/L=0,0015, indiquent que le cylindre est très mince. On représente sur la figure 3.9 la géométrie et les données mécaniques du modèle à analyser. Le chargement concerne l'application de deux forces diamétralement opposées (P) et (-P) sur la section médiane du cylindre.

Tableau 3.1 Cylindre pincée à bords libres

– Caractéristiques géométriques et mécaniques-

Longueur du cylindre *(L)*	10.35
Rayon du cylindre (*R)*	4.953
Module de Young (*E)*	$10.50 \text{x} 10^6$
Coefficient de Poisson (υ)	0.3125
Epaisseur (h)	0.01548
Force concentrée (P)	0.10

Du fait de la double symétrie, nous modélisons seulement un huitième ABCD du cylindre en imposant les conditions de symétrie le long des côtés "AB", "CB" et "DC". Les conditions aux limites considérées ici sont les suivantes :

Tableau 3.2. Cylindre pincée à bords libres

– Conditions aux limites et condition de symétrie-

$W = \theta_x = \theta_y = 0$	Along AB
$V = \theta_x = \theta_z = 0$	Along CB
$U = \theta_y = \theta_z = 0$	Along DC

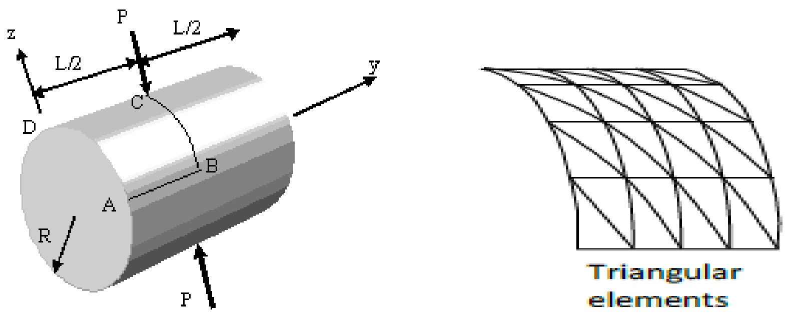


Figure 3.9 Cylindre pincé à bords libres

Le maillage considéré est composé d'une maille unique (double élément triangulaire) suivant la direction longitudinale, puisque la coque se déforme sensiblement de la même manière dans chaque section transversale, et plusieurs mailles sont considérées suivant la direction circonférentielle. Les rapports L/h=668,6 et R/h=320 indiquent que la coque est très mince. Timochenko et Woinowsky-Krieger (1959) donnent une solution analytique pour ce cas

limite (coque mince profonde), qui est W_C=-0,0244. Nous comparons nos résultats avec ceux donnés par Guenfoud (1990, 1996). Nous notons que pour le présent exemple, le mode de flexion est dominant. En effet, au point B, par exemple, nous avons pour z=h/2 que :

$$\sigma_x(z) = \frac{N_x}{h} + M_x.\frac{12}{h^3}.z \qquad \sigma_x(z = \frac{h}{2}) = \frac{N_x}{h} + M_x.\frac{12}{h^3}.\frac{h}{2}$$

D'où : $\frac{M_x}{N_x} = \frac{5}{6}h$

Le paramètre considéré ici pour évaluer les performances du présent élément fini de coque pour l'exemple actuel, sont le déplacement suivant l'axe z du point C (Le déplacement transversal W_C) et le déplacement radial au point B (déplacement U_B). Nous présentons aux figures 3.10 et 3.11 les résultats de notre élément et nous concluons ce qui suit :

- Une convergence rapide du présent élément, reflétant ainsi une représentation correcte de l'état des mouvements du corps rigide,
- Notre élément converge vers la solution donnée par la théorie des coques profondes W_C=-0.0244 (cas du cylindre mince).
- Avec le maillage sélectionné, nous observons une convergence monotone ascendante du présent élément vers la solution de référence.
- Les résultats numériques obtenus pour le cylindre pincé à bords libres indiquent que l'élément développé présente une bonne précision.

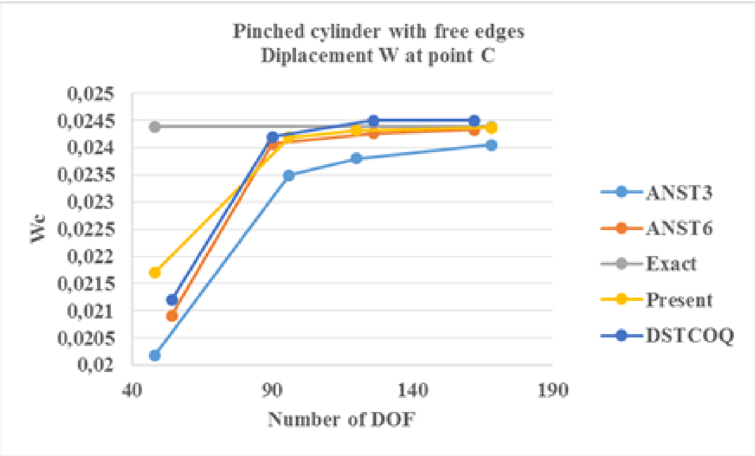


Figure 3.10 Cylindre pincée à bords libres – Déplacement W au nœud C -

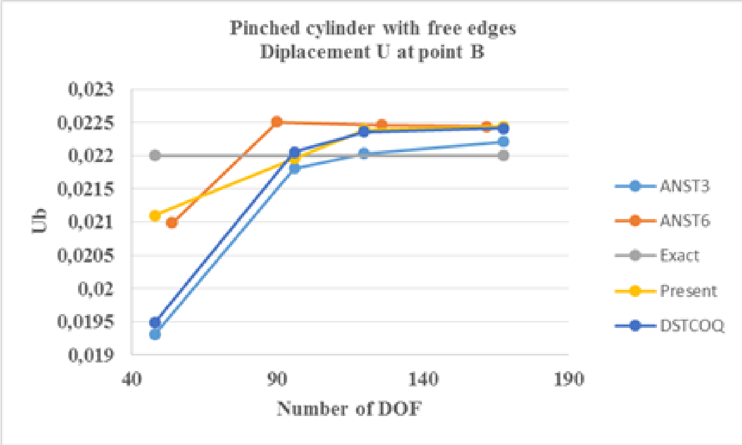


Figure 3.11 Cylindre pincée à bords libres – Déplacement U au nœud B

3.6.4. Cylindre Pincé Infiniment long

Le cylindre circulaire pincé infiniment long, exposé sur la figure 3.12, est soumis à deux lignes de charge transversales uniformes diamétralement opposées. Nous cherchons à résoudre ce problème de manière à démontrer l'influence des relations entre déformations et déplacements d'une part et à suivre le comportement de notre élément tout en modélisant des structures courbes d'autre part. Nous présentons les données géométriques et mécaniques de cette coque sur la figure 3.12. De la même manière que dans Batoz (1977), Geoffroy (1983), Guenfoud H. (2017), Guenfoud H. (2018) et Guenfoud H. (2018) et sur la base de la symétrie, nous ne modélisons qu'un quart EAFDBC d'une bande de la coque. Les conditions aux limites imposées permettent de se libérer de l'influence de la direction Y sur la déformation de l'ensemble. Des forces ponctuelles substituent la charge uniforme.

Tableau 3.3. Cylindre Pincé Infiniment long

– Caractéristiques géométriques et mécaniques-

Rayon du cylinder (R)	10
Module de Young (E)	10^5
Coefficient de Poisson (υ)	0
Epaisseur (h)	1

Tableau 3.4. Cylindre Pincé Infiniment long

– Conditions aux limites -

$V = \theta_x = 0$	En tous noeuds
$U = \theta_y = 0$	Le long EF et DC

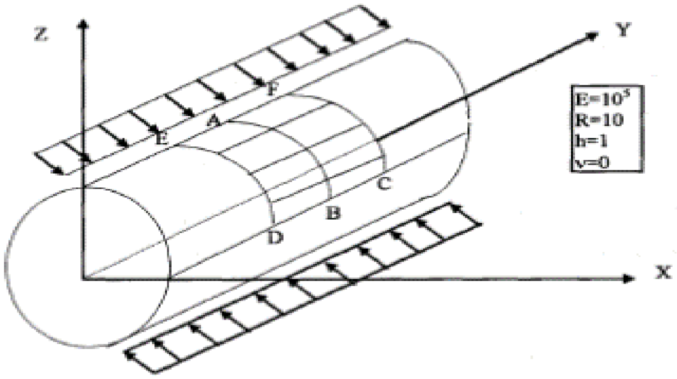


Figure 3.12 Cylindre Pincé Infiniment Long

Nous dévoilons les résultats numériques normalisés des déplacements verticaux pour les nœuds A et B en fonction du nombre total de degrés de liberté sur les Figures 3.13 et 3.14. Nous comparons les résultats de notre élément à deux solutions exactes. La première, donnée par Donnel (1933), elle est basée sur la théorie des coques surbaissées et la seconde basée sur la théorie des coques profondes donnée par Koiter (1960, 1973) et Sander (1959). De même que dans Guenfoud (1990) et Geoffroy (1983), Il est à noter que :

- Une convergence monotone rapide vers la solution exacte est obtenue par notre élément.
- On remarque l'existence d'un saut entre les deux premiers maillages et le troisième. Ceci est dû au fait que la coque a un comportement de coque peu profonde pour les deux premiers maillages alors qu'elle montre un comportement de coque profonde lorsque le maillage est raffiné.

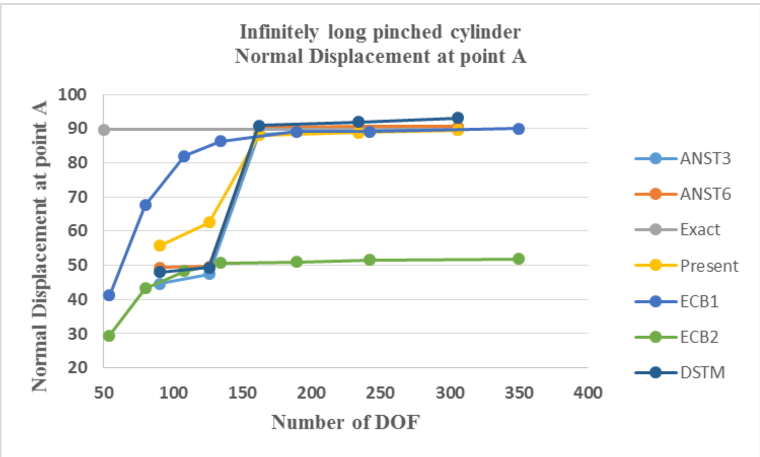


Figure 3.13 Cylindre Pincé Infiniment long
Déplacement Normal au nœud A

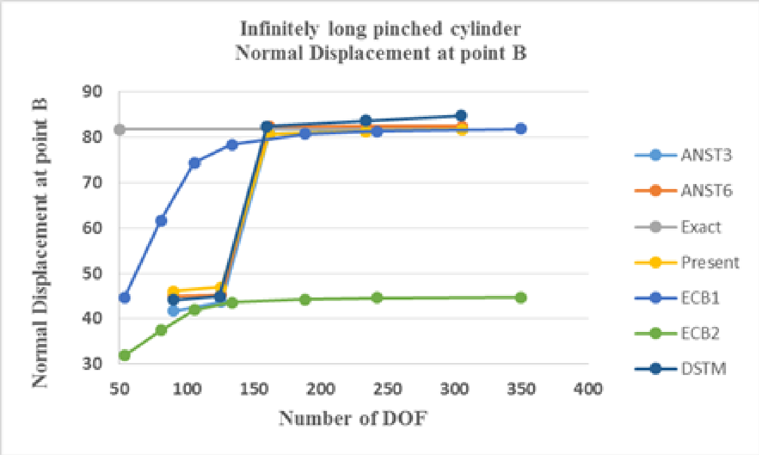


Figure 3.14 Cylindre Pincé Infiniment long
Déplacement Normal au nœud B

3.6.5 Panneau Cylindrique soumis à son poids propre (Scordelis-Lo roof, coque mince peu profonde 1964)

Le prochain test, considéré ici et utilisé de façon récurrente pour étudier la performance des éléments de coque, est le panneau (toit) de Scordelis-Lo (1964). C'est certainement le problème le plus utilisé pour comparer les différents éléments de coque proposés dans la littérature. C'est un panneau cylindrique circulaire où les deux bords courbes sont simplement supportés par deux diaphragmes rigides le long de leurs côtés plans et les deux autres bords sont libres. Le panneau est soumis à son propre poids seulement. Nous donnons à la figure 3.15 et au tableau 3.5 les caractéristiques géométriques et mécaniques du panneau.

Tableau 3.5. Panneau Cylindrique soumis à son poids propre
– Caractéristiques géométriques et mécaniques-

Longueur du Panneau (L)	L=6m
Rayon moyen de la partie courbe (R)	R=3m
Epaisseur du panneau (h)	h=0,03m
Module de Young (E)	30000N/m^2
Coefficient de Poisson (υ)	0,3
Poids volumique du panneau (γ_g)	γ_g=-0,2083N/m^3
Angle φ=40°	φ =40°

Tableau 3.6. Panneau Cylindrique soumis à son poids propre

– Conditions aux limites et conditions de symétries -

Conditions aux	limites
$U=W=\theta_y=0$	Le long de AD
Conditions de	symétries
$V=\theta_x=\theta_z=0$	Le long de CB
$U=\theta_y=\theta_z=0$	Le long de CD

Tableau 3.7. Panneau Cylindrique soumis à son poids propre

– Valeurs de comparaisons -

Valeurs de références	Théorie des coques profondes
W_B=-0,00361 m	W_C=0,000541m
Solutions Analytique	Théorie des coques surbaissées
W_B=-0,003703 m	W_C=0,000525m
U_B=-0,001965 m	V_A=- 0,001413m

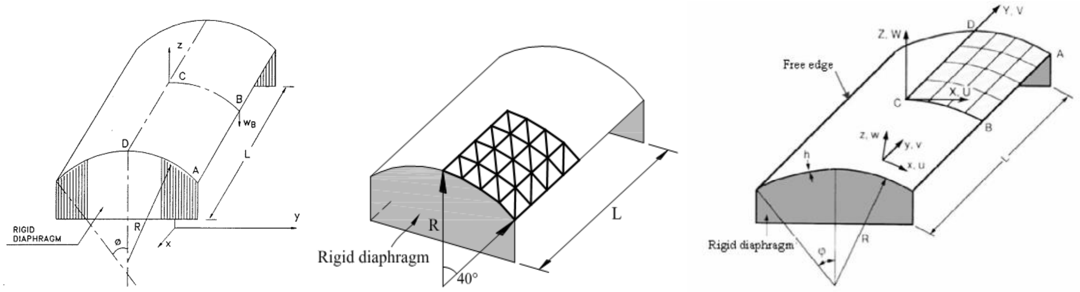


Figure 3.15 Panneau Cylindrique soumis à son poids propre

Scordelis-Lo roof, Coque mince surbaissée

L’actuel panneau est mince et peu profond (R/h = 100, L/h = 200). La symétrie du problème nous permet d'étudier seulement le quart ABCD de la structure avec des maillages réguliers (N = 2, 4, 6 ... éléments) aux côtés de AB et AD. Nous négligeons les déformations transversales dues au cisaillement transversal. Les déformations membranaires (dues aux efforts normaux) sont plus importantes en comparaison avec les déformations de flexion (dues aux moments fléchissant). L'influence de la membrane sur le comportement global de la coque

est très dominante. En effet, la comparaison des deux effets rapportés (membrane et flexion) au point (B) donne : $\frac{h\ N_x}{6\ M_x} = 4$.

Les résultats obtenus par le présent élément de coque à facettes planes, développé dans cette thèse, pour le déplacement vertical au point médian B du bord libre et au centre C du panneau (toit) sont montrés aux Figures 3.16 et 3.17 respectivement. Nous comparons nos résultats à deux solutions de référence. La première analytique repose sur la théorie des coques profondes due à Scordellis (1964) et la seconde basée sur la théorie des coques surbaissées due à Forsberg (1970) d'une part et aux résultats numériques de la littérature d'autre part. Nous constatons une convergence rapide des résultats du présent élément vers la solution des coques peu profondes par rapport à d'autres éléments. Cette convergence remarquable due à la richesse de l'élément en membrane (interpolation cubique). Les courbes de convergence des Figures 3.16 et 3.17 montrent la bonne contribution de l'approche en déformation. Les résultats généraux approuvent la bonne convergence de l'élément de coque formulé dans le présent travail Guenfoud H. (2018) et Guenfoud H. et al. (2018).

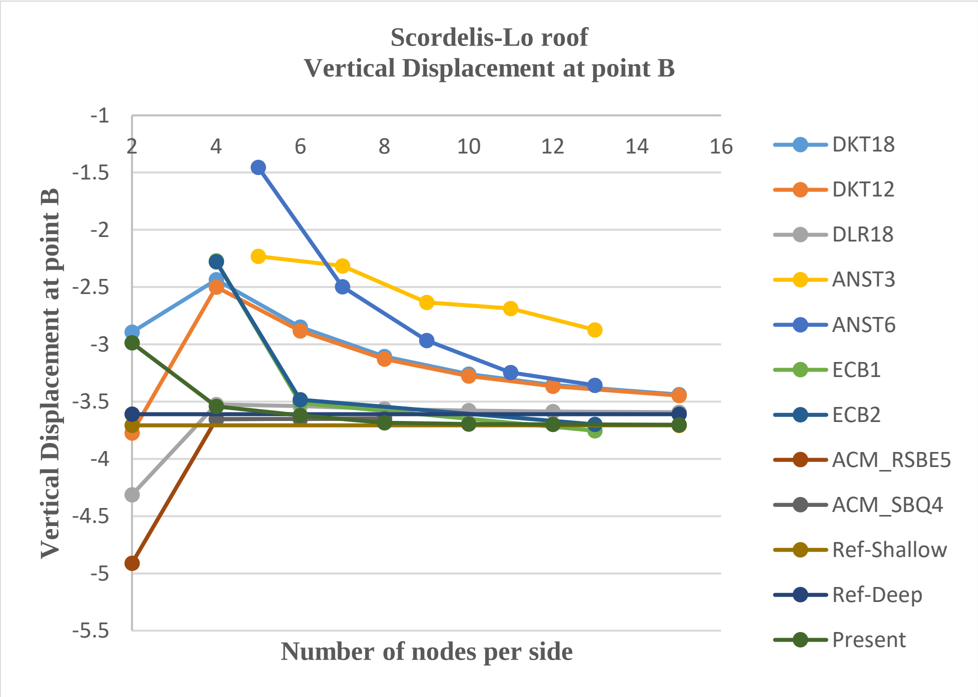


Figure 3.16 Panneau Cylindrique soumis à son poids propre

Déplacement Vertical au nœud B

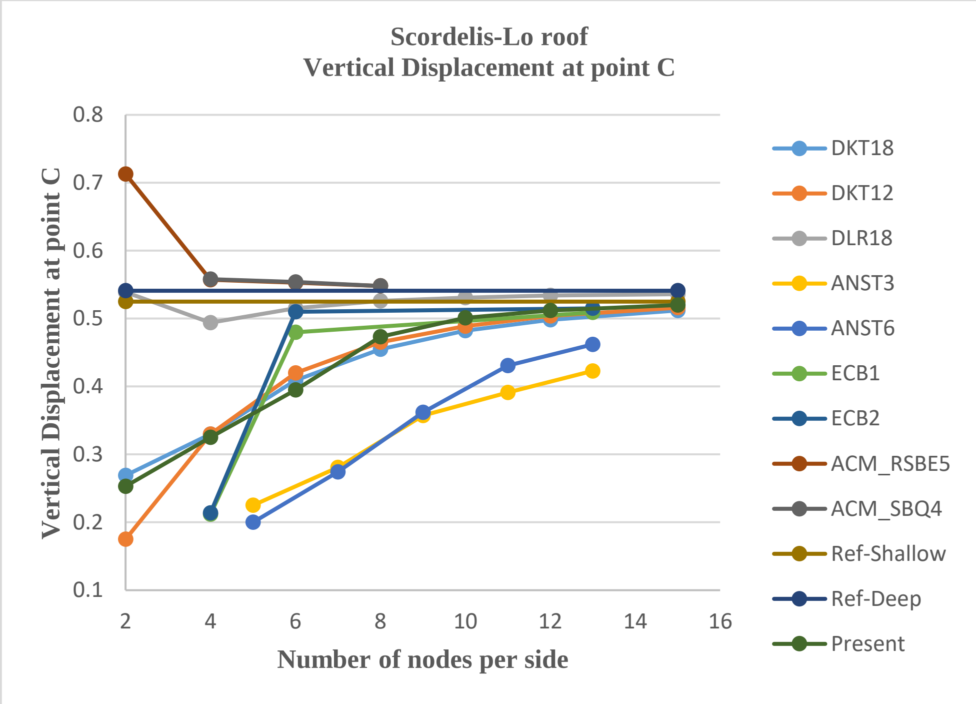


Figure 3.17 Panneau Cylindrique soumis à son poids propre

Déplacement Vertical au nœud C

3.6.6 Coque sphérique à base carrée

Le problème présenté sur la figure 3.18 est la coque sphérique à base carrée articulée sur son pourtour. Cette coque se caractérise par son rayon R, son ouverture α et son épaisseur h. Elle est soumise à une charge concentrée (P) au centre de sa crête. La figure 3.18 présente les données géométriques et les caractéristiques mécaniques de cette coque sphérique à base carrée. Tous les bords de la coque sont articulés.

Tableau 3.8. Coque sphérique à base carrée

– Caractéristiques géométriques et mécaniques-

Longueur de la base carrée (2a)	2a=1569,8 mm
Rayon de la sphère (R)	R=2540 mm
Epaisseur (h)	h=99,45mm
Module de Young (E)	68,95 MPa
Coefficient de Poisson (υ)	0,3
Force concentrée (P)	P=1N

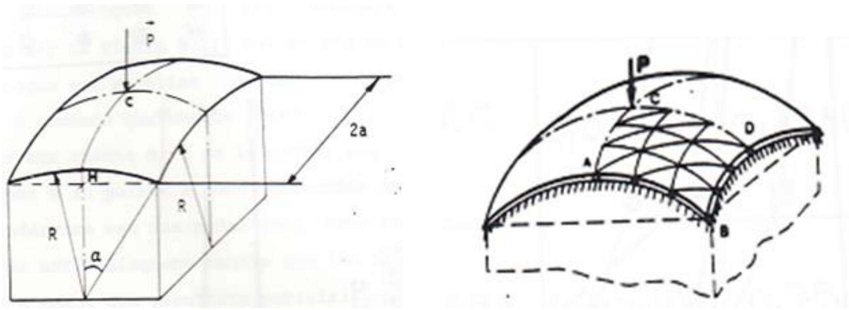


Figure 3.18 Coque sphérique à base carrée

Données géométriques et maillage

Les rapports 2a/h=15,78 et R/h=25,54 indiquent que la coque est modérément mince. Elle est également assez surbaissé car le rapport de sa profondeur à sa longueur de côté est égal à 2a/H= 12,65. La symétrie du problème nous permet d'étudier seulement le quart ABDC de la coque. Ce problème a été traité analytiquement par Leicester (1968) et numériquement par plusieurs chercheurs tels que Dhatt (1970), Gallagher (1975), Tahiani et Lachance (1975), Fezans (1981), Guenfoud (1990, 1996) et Guenfoud H. (2017, 2018). Les résultats obtenus pour les déplacements verticaux au point de chargement (C) sont montrés sur la figure 3.19. La solution de référence est tirée de Fezans (1981). On observe une remarquable convergence de notre élément pour cet exemple, ce qui confirme l'utilité de notre élément pour la modélisation des structures à double courbure surbaissées. Ainsi, il converge de manière monotone vers la solution des coques peu profondes.

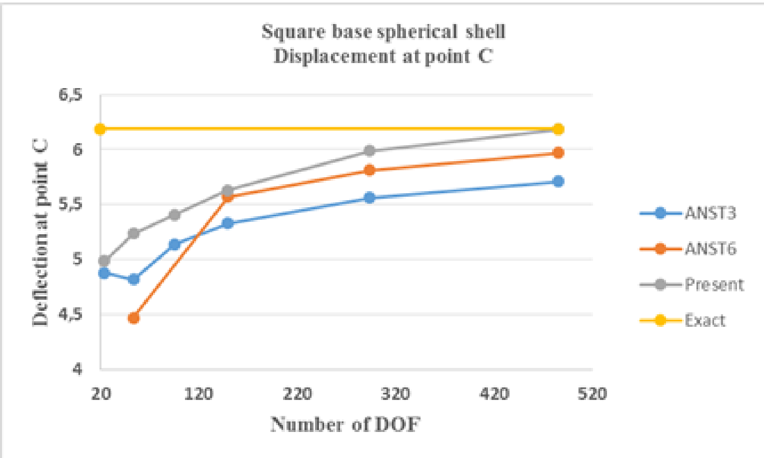


Figure 3.19 Coque sphérique à base carrée

Déplacement vertical au centre C de la coque

3.6.7 Coque Parabolique Hyperboloïde sous pression uniforme

Nous considérons un tronçon d'une coque parabolique hyperboloïde semi-mince (2a/h=52) avec des arêtes droites articulées soumises à une pression normale uniforme. Nous montrons les données géométriques et les propriétés mécaniques du matériau sur la figure 3.20.

L'équation gouvernant la présente coque est donnée par : $Z = \left(\frac{b}{a^2}\right)$ X.Y. C'est une coque distinctive ayant une courbure Gaussienne négative et sa géométrie convient à une coque profonde.

Tableau 3.9. Parabolique hyperboloïde sous pression
– Caractéristiques géométriques et mécaniques-

Longueur (2a)	12.92 cm
Elévation (C)	1.304 cm
Module de Young (E)	5.10^5 kg/cm^2
Coefficient de Poisson (υ)	0.39
Epaisseur (h)	0.25 cm
Charge de pression normale (q)	-1.0 kg/cm^2
Tous les côtés sont articulés	

La structure n'est pas symétrique. Il est nécessaire de discrétiser l'ensemble de la coque. Le but du présent exemple est de voir la capacité de notre élément à modéliser des structures à double courbure. Le présent exemple est à flexion légèrement dominante. En effet, au point O et pour z=h/2, on a: $\frac{6\,M_x}{h\,N_x} = 1.5$.

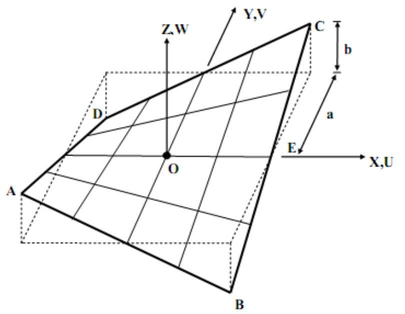


Figure 3.20 Coque Parabolique hyperboloïde sous pression uniforme

Nos résultats sont présentés sur la figure 3.21. Ils caractérisent la déflexion au centre de la coque en fonction du nombre total de degrés de liberté pour différents maillages. Nous comparons nos résultats avec la solution analytique donnée par Chetty et Tottenham (1964) (Déplacement W au centre O égale à 0.00874) et avec les résultats numériques de Guenfoud (1990, 1996). Nous notons une bonne convergence monotone des résultats de notre élément vers la solution analytique.

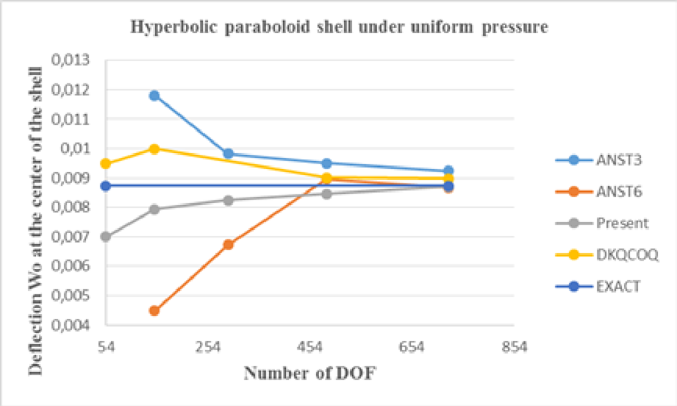


Figure 3.21 Coque Parabolique hyperboloïde sous pression uniforme

Flèche au centre de l'hyperboloïde

3.6.8 Coque hémisphérique (test de Mac Neal)

Nous étudions la coque hémisphérique soumise à quatre forces ponctuelles radiales en auto-équilibre distante à des intervalles de 90 °, deux forces entrantes (vers l'intérieur) et deux autres sortantes (vers l'extérieur) aux quarts de ses bords ouverts, via le modèle d'un quart de la structure représenté sur la Figure 3.22. Ce problème a pour but de vérifier la performance de l'élément à modéliser les rotations de solide rigide et la flexion inextensible pour une coque à double courbures. Sur la figure 3.22 nous présentons les propriétés géométriques et matérielles de la coque en question. Flugge en (1960) présente une solution analytique au problème. La solution de référence pour le déplacement radial aux points chargés est de 0,0924. En raison de la symétrie, nous analysons exclusivement le quart de cette coque hémisphérique. Nous exposons les résultats pour différents maillages à la figure 3.22. Ils indiquent que l'élément proposé fonctionne bien en comparaison avec d'autres éléments de la littérature. Nous comparons nos résultats à la solution analytique donnée par Flugge (1960), à la solution de référence due à Belytchko (1984) et aux résultats numériques de Guenfoud (1990, 1996).

Tableau 3.10 Coque hémisphérique (test de Mac Neal)

– Caractéristiques géométriques et mécaniques-

Rayon de la sphère (R)	10.00m
Module de Young (E)	6.825×10^{7}Pa
Coefficient de Poisson (υ)	0.3
Epaisseur (h)	0.04m
Charge (Concentrée)	P=2N

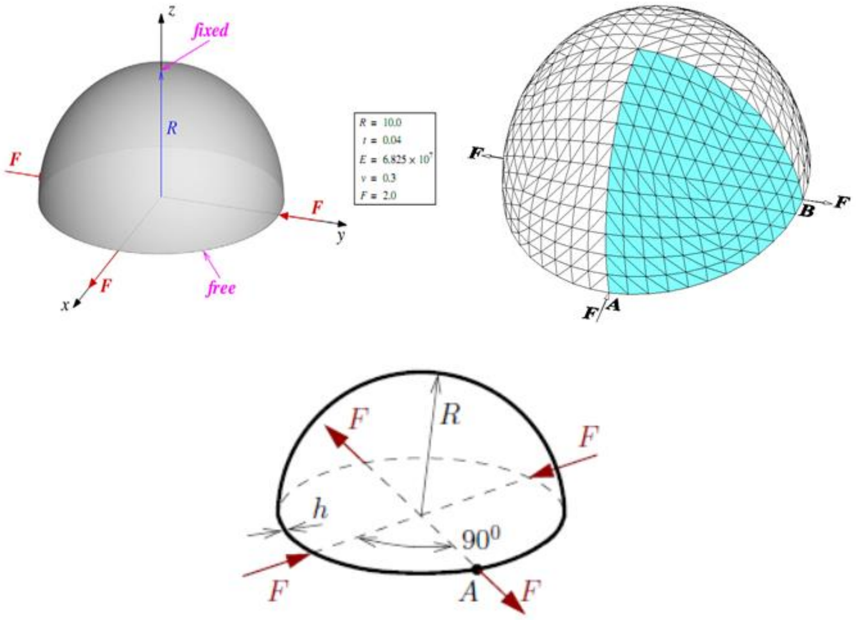


Figure 3.22 Coque hémisphérique (test de Mac Neal)

Données géométrique et maillage

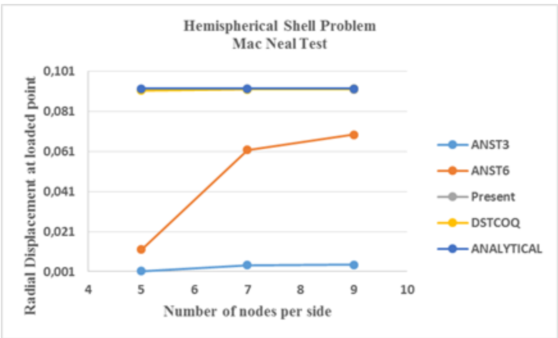


Figure 3.23 Coque hémisphérique (test de Mac Neal)

Déplacement radial au point de chargement

3.7. Conclusion

La formulation d'un élément, de coque mince triangulaire à facette plane avec une rotation vraie basée, sur l'approche en déformation a été développée avec succès et présentée dans le présent chapitre. Les trois déplacements translationnels (u, v et w) sont décrits en termes de fonctions polynomiales cubiques. L'utilisation de champs d'ordre égal pour tous les déplacements (membranaire et flexionnel) a pour effet de rapprocher plus strictement la condition de mouvement du solide rigide. L'originalité dans la formulation du présent élément réside dans l'utilisation du modèle en déformation et l'utilisation de concepts et techniques suivants pour :

- L'enrichissement des champs de déplacement (raffinement P), donc une meilleure précision dans l'approximation de la solution.

- Amélioration du comportement en cas de distorsion géométrique du maillage.

- L’évitement du problème de blocage de membrane pour les structures courbes.

- La réponse aux problèmes numériques induits par l'absence de rigidité liée à la rotation autour de la normale dans le cas des éléments coplanaires.

Ces concepts et techniques sont :

- Adoption de l'approche en déformation ;

- L'introduction d'un quatrième nœud interne (nœuds esclave) dans l'élément triangulaire à trois nœuds ;

- La réduction des matrices de raideur élémentaires en utilisant la technique de condensation statique ;

- L'utilisation de l'intégration analytique pour évaluer la matrice de rigidité.

Cette approche nous a offert à un élément de coque à facettes planes, compétitif, robuste et efficace. La formulation actuelle (approche en déformation) montre qu'elle est cohérente dans une très grande variété de situations d'analyse linéaire. Une série de problèmes test guident à évaluer l'efficacité de l'élément par rapport à d'autres éléments se trouvant dans la littérature. Les résultats obtenus ont confirmé le taux de convergence rapide de l'élément. L'élément proposé a l'avantage d'être de forme simple et utilise les six degrés de liberté. En outre, il peut être utilisé pour l'analyse de structures à coque mince, même celles avec des géométries complexes.

3.8. Bibliographie

Barik, M., & Mukhopadhyay, M. (2002). “A new stiffened plate element for the analysis of arbitrary plates’’. Thin-Walled Structures, 40(7), 625-639. http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8231(02)00016-2

Batoz J. L., (1977). “Analyse non linéaire de coques minces élastiques de formes arbitraires par éléments triangulaires courbes’’. Thèse de doctorat. Faculté des sciences et de génie civil, Québec, 1977, 372 P

Batoz, J. L., & Dhatt, G. (1990). Modélisation Des Structures Par Eléments Finis : Solides Elastiques (Vol. 1). Presses Université Laval.

Belarbi, M. T. & Charif, A. (1999). “Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses’’. Revue

européenne des éléments finis, 8(2), 135-157. http://dx.doi.org/10.1080/12506559.1999.10511361

Belarbi M.T., (2000). "Développement de nouveaux éléments à modèle en déformation : Application linéaire et non linéaire''. Thèse de Doctorat, Université de Constantine, Algérie.

Belytschko, T., Stolarski, H., Liu, W. K., Carpenter, N., & Ong, J. S. (1985). "Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements''. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 51(1), 221-258. http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(85)90035-0

Belytschko, T., Ong, J. S. J., Liu, W. K., & Kennedy, J. M. (1984). "Hourglass control in linear and nonlinear problems". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 43(3), 251-276. http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(84)90067-7

Bentaher M., (1981). "Analyse élastoplastique des plaques et coques minces par éléments finis''. Thèse de 3ème cycle, Université de Technologie de Compiègne, 1981, 130 P

Bhothikhun, P., & Dechaumphai, P. (2014). "Adaptive DKT finite element for plate bending analysis of built-up structures''. International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering, 14(1), 12-20. 141201-8787-IJMME-IJENS

Boutagouga D.,(2008). "Analyse non-linéaire géométrique et matérielle des coques par un élément quadrilatère avec ddl rotationnel dit (Drilling rotation)'', Mémoire de Magister, Université Badji mokhtar Annaba, 2008

Boutagouga, D., Gouasmia, A., & Djeghaba, K. (2010). "Geometrically nonlinear analysis of thin shell by a quadrilateral finite element with in-plane rotational degrees of freedom''. European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique, 19(8), 707-724. Doi/abs/10.3166/ejcm.19.707-724

Boutagouga, D. & Djeghaba, K. (2016). "Nonlinear dynamic co-rotational formulation for membrane elements with in-plane drilling rotational degree of freedom. Engineering computations Vol. 33 (3), pp.667-697, 2016. http://dx.doi.org/10.1108/EC-02-2015-0030

Boutagouga, D. (2016). "A new enhanced assumed strain quadrilateral membrane element with drilling degree of freedom and modified shape functions''. International Journal for numerical methods in engineering. Article in Press 2016. DOI:10.1002/nme.5430

Burkardt J.; (2010); "FEM basis functions for a triangle''. http://people.sc. fsu.edu/.../ cg_lab_fem_basis_triangle.pdf

Carpenter, N., Stolarski, H., & Belytschko, T. (1986). "Improvements in 3-node triangular shell elements''. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **23**(9), 1643-1667. DOI:10.1002/nme.1620230906

Chetty S. & Tottenham H., (1964). “An investigation into the bending analysis of hyperbolic paraboloide shells’’. Indian Concrete Journal, June 1964, PP 248-258

Chinosi, C. (2005). “PSRI elements for the Reissner–Mindlin free plate’’. Computers & structures, 83(31), 2559-2572. http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.07.005

Dhatt, G. S. (1970, September). Instability of thin shells by the finite element method. In Proc. IASS Symp., Vol1, Vienna (pp. 1-36).

Donnell, L. H. (1933). NACA Report No. 479. “Stability of thin walled tubes under torsion’’. Document ID: 19930091553

El-Khaldi, F. (1987) Contribution au traitement des phénomènes de blocage de membrane et cisaillement dans la modélisation des arcs et des coques minces en théorie de Marguerre, Doctoral dissertation, Villeurbanne, INSA.

Fezans, G. (1981). “Analyse linéaire et non linéaire géométrique des coques par éléments finis iso-paramétriques tridimensionnels dégénérés’’. Doctoral dissertation.

Flűgge, W. (1960). “Stresses in Shells’’. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.

Forsberg K and Hartung R., (1970); “An evaluation of finite difference and finite element techniques for analysis of general shells’’, Symposium on high speed computation of elastic structures, IUTAM, Liège 1970, PP 837-859

Gallagher, R. H. (1975, October). Shell elements. In Proc. First World Congress on Finite Element Methods in Structural Mechanics, Bournemouth, England.

Geoffroy, P. (1983) Développement et évaluation d’un élément fini pour l’analyse non linéaire statique et dynamique de coques minces, Doctoral dissertation.

Gileva, L., Shaydurov, V., & Dobronets, B. (2013). “The triangular Hermite finite element complementing the Bogner-Fox-Schmit rectangle’’. Applied Mathematics, 4(12), 50. DOI: 10.4236/am.2013.412A006

Guenfoud M. (1990). “Deux éléments triangulaires nouveaux pour l'analyse linéaire et non linéaire géomètrique des coques’’, Doctoral dissertation, Villeurbanne, INSA, France.

Guenfoud M. (1993). “Présentation de l’élément DSTM pour le calcul linéaire des coques d’épaisseur quelconque’’. Ann. ITBTP, (515), 25-52.

Guenfoud Mohamed (1996). “A new three nodes shell element with transverse shear’’. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, 37(3), 193-220. Cote INIST: 22478, 35400006282702.0040

Guenfoud Mohamed (2000). “A New Three Nodes Shell Element with Transverse Shear’’. Engineering Journal of Qatar University, 2000, Vol.13, Pages 193-221. http://hdl.handle.net/10576/8000

Guenfoud Mohamed Himeur Mohamed (2011). Bending triangular finite element with a fictitious fourth node based on the strain approach. Congrès Algérien de Mécanique, Université de Guelma 14-17 Novembre 2011. www.cam-dz.org/

Guenfoud Mohamed, Hamza Guenfoud and Mohamed Himeur (2014). Development of a thick plate finite element with transverse shear effect using the strain approach. The Eighth Jordanian International Mechanical Engineering Conference JIMEC 2014, AMMAN, Jordan 22-24/9/2014. http://www.jeaconf.org/JIMEC

Guenfoud Mohamed, Mohamed Himeur and Hamza Guenfoud (2015). A new consistent finite element thick plate based on strain approach. ICOCEE 2015, International Conference on civil and Environmental Engineering, 20-23 May 2015 Cappadocia, TURKEY, www.icocee.org

Guenfoud Hamza, Mohamed Himeur, Hassina Ziou and Mohamed Guenfoud (2017). A New Shell Finite Element Based on the Strain Approach with Drilling Rotation. CAM 2017, 26-30 Novembre 2017, Constantine, Algérie.

Guenfoud Hamza, Mohamed HIMEUR, Abdesselam ZERGUA, Hassina ZIOU, and Mohamed GUENFOUD (2017). A thin flat shell finite element based on the strain approach with a true rotation. RUGC, Rencontres Universitaires de Génie Civil, 22-24 mai 2017, Nantes, France

Guenfoud Hamza., Himeur Mohamed, Ziou Hassina & Guenfoud Mohamed (2018). A Consistent triangular thin flat shell finite element with drilling rotation based on the strain approach. International Journal of Structural Engineering (IJSTRUCTE), vol.9, N°3, pages 191-223, DOI: 10.1504/IJSTRUCTE.2018.10014819, http://www.inderscience.com

Guenfoud, Hamza, Himeur, Mohamed, Ziou, Hassina, *et al.* The use of the strain approach to develop a new consistent triangular thin flat shell finite element with drilling rotation. *Structural Engineering And Mechanics*, 2018, vol. 68, no 4, p. 385-398.

Hamadi, D., Ayoub, A., & Abdelhafid, O. (2016). "A new flat shell finite element for the linear analysis of thin shell structures''. European Journal of Computational Mechanics, 1-24. http://dx.doi.org/10.1080/17797179.2016.1153401

Hamadi, D. (2006). "Analysis of structures by non-conforming finite elements" analyse des structures par elements finis non conformes". Doctoral dissertation, Université Mohamed Khider Biskra.

Hamadi, D. (1989). "Numerical and Experimental Investigation of an Elliptical Parboloid Thin Shell Structures''. Doctoral dissertation, Master Thesis, City University London.

Hamadi, D., Ayoub, A., & Maalem, T. (2016). 'A new strain-based finite element for plane elasticity problems'. Engineering Computations, 33(2), 562-579. http://dx.doi.org /10.1108/EC-09-2014-0181

Himeur M. (2008). Développement d'éléments membranaires nouveaux d'élasticité plane basés sur la formulation en déformation. Thèse de magistère, Université du 8 Mai 1945 Guelma (Algérie), Département de Génie Civil et d'Hydraulique.

Himeur M. and Guenfoud M. (2008). Elément fini triangulaire nouveau à nœud central perturbé en formulation déformation avec «Drilling rotation». CIFMA 3, 21-23; Alep.

Himeur M. and Guenfoud M. (2011). Bending triangular finite element with a fictitious fourth node based on the strain approach. European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique, 20(7-8), 455-485. http://dx.doi.org/10.3166/ejcm.20.455-485

Himeur Mohammed and Mohamed Guenfoud (2011). Bending Triangular finite element with fictitious fourth node based on the strain approach. Courrier du Savoir Scientifique et technique N° 03-11, 2011, Mars 2011. http://revues.univ-biskra.dz/index.php/cds/index

Himeur Mohammed and Mohamed Guenfoud (2011). Elément fini flexionnel triangulaire doté d'un quatrième nœud fictif base sur l'approche en déformation, Nature & Technologie N° 5, Juin 2011. ISSN=2437-0312.

Himeur Mohamed and Guenfoud Mohamed (2011). Bending triangular finite element with a fictitious fourth node based on the strain approach. 4ème Congres International Conception et Modelisation des Systèmes Mécaniques CMSM'2011, Sousse, Tunisie, 30 Mai -1 Juin 2011. http://www.la2mp.org/node/111

Himeur Mohamed and Guenfoud Mohamed (2012). Elément fini flexionnel triangulaire doté d'un quatrième nœud fictif basé sur l'approche en déformation. 1er Congrès International de Génie Civil et d'Hydraulique, Guelma 10-11 décembre 2012. http://old.univ-guelma.dz/seminaires/cigch/index.html

Himeur M., Benmarce A. & Guenfoud, M. (2014). A new finite element based on the strain approach with transverse shear effect. Structural Engineering and Mechanics, 49(6), 793-810. DOI: http://dx.doi.org/10.12989/sem.2014.49.6.793

Himeur Mohamed, Guenfoud Hamza and Mohamed Guenfoud (2014). A new Thick finite plate element based on the strain approach. ACE2014, 21-25 October 2014, Istanbul, Turkey, 2014. http://www.ace2014.org/en/

Himeur M., Zergua A. and Guenfoud, M. (2015). A Finite Element Based on the Strain Approach Using Airy's Function. Arabian Journal for Science and Engineering, 40(3), 719-733. DOI: 10.1007/s13369-014-1543-3.

Himeur M. (2015). Contribution à la formulation de quelques éléments de coques basés sur la formulation en déformation. Doctoral dissertation, Université du 8 Mai 1945 Guelma (Algérie), Département de Génie Civil et d'Hydraulique.

Himeur Mohamed, Hamza Guenfoud and M. Guenfoud (2016). A new consistent finite element thick plate based on strain approach. 12th International Congress on Advances in Civil Engineering, 21-23 September 2016, Istanbul, Turkey. http://www.ace2016.org/en/PROGRAM.html

Himeur Mohamed, Hassina Ziou and Mohamed Guenfoud (2017). Un nouvel élément fini base sur le modèle en deformation. Congrès Français de Mécanique CFM2017, 28 Aout- 01 Septembre 2017, Lille France

Huang, M., Zhao, Z., & Shen, C. (2010). An effective planar triangular element with drilling rotation. Finite Elements in Analysis and Design, 46(11), 1031-1036. http://doi.org/10.1016/j.finel.2010.07.019

Jeon, H. M., Lee, P. S., & Bathe, K. J. (2014). The MITC3 shell finite element enriched by interpolation covers. Computers & Structures, 134, 128-142. http://doi.org/10.1016/j.compstruc.2013.12.003

Kim, D. N., & Bathe, K. J. (2009). A triangular six-node shell element. Computers & Structures, 87(23), 1451-1460. http://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.05.002

Koiter, W. T., & Simmonds, J. G. (1973). Foundations of shell theory. In *Theoretical and applied mechanics*. pp. 150-176. Springer Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-65590-6_11

Koiter, W. (1960). A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. *Theory of Thin Elastic Shells*, 12-33.

Kugler, S., Fotiu, P. A., & Murin, J. (2010). A highly efficient membrane finite element with drilling degrees of freedom. Acta mechanica, 213(3-4), 323-348. DOI: 10.1007/s00707-009-0279-8

Leicester, R. H. (1968). Finite deformations of shallow shells (Shallow shell deformations based on nonlinear equations solved by Newton-Raphson iteration). American society of civil engineers, engineering mechanics division, journal, 94, 1409-1423.

Oñate, Eugenio (2009), Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Volume 1. Basis and Solids, Springer Science & Business Media, 2009

Oñate, Eugenio (2013), Structural analysis with the finite element method. Linear statics: volume 2: beams, plates and shells. Springer Science & Business Media, 2013.

Papanicolopulos, S. A., Zervos, A., & Vardoulakis, I. (2009). A three-dimensional C^1 finite element for gradient elasticity. International journal for numerical methods in engineering, 77(10), 1396-1415. DOI: 10.1002/nme.2449

Rezaiee-Pajand, M., & Karkon, M. (2014). Hybrid stress and analytical functions for analysis of thin plates bending. Latin American Journal of Solids and Structures, 11(4), 556-579. http://dx.doi.org/10.1590/S1679-78252014000400001

Rezaiee-Pajand, M., & Yaghoobi, M. (2014). An efficient formulation for linear and geometric non-linear membrane elements. Latin American Journal of Solids and Structures, 11(6), 1012-1035. http://dx.doi.org/10.1590/S1679-78252014000600007

Sabir, A. B. (1985, July). A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom. In Proceedings of the Second International Conference on Variational Methods in Engineering," Brebbia CA ed., Southampton University, pp. 17-25.

Sanders, Jr, J. L. (1959). An improved first-approximation theory for thin shells.

Sarf Jean-Luc (1991), La condensation statique dans FELINA, Rapport Interne LSC 91/22, 1991.

Scordelis, A. C., & Lo, K. S. (1964). Computer analysis of cylindrical shells. In Journal Proceedings, Vol. 61, No. 5, pp. 539-562.

Serpik, I. N. (2010). Development of a new finite element for plate and shell analysis by application of generalized approach to patch test. Finite Elements in Analysis and Design, 46(11), 1017-1030. http://doi.org/10.1016/j.finel.2010.07.017

Shin, C. M., & Lee, B. C. (2014). Development of a strain-smoothed three-node triangular flat shell element with drilling degrees of freedom. Finite Elements in Analysis and Design, 86, 71-80. http://doi.org/10.1016/j.finel.2014.04.002

Tahiani, C., & Lachance, L. (1975). Linear and non-linear analysis of thin shallow shells by mixed finite elements. Computers & Structures, 5(2-3), 167-177. DOI: 0045794975900073

Teodorescu P., (1982); 'Grands éléments finis "GEF" pour l'élasticité plane'. Thèse no 462 de doctorat présentée au département de génie civil, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne Suisse. DOI: 10.5075/epfl-thesis-462

Thomas, G. R., & Gallagher, R. H. (1975). A triangular thin shell finite element: linear analysis. Document ID: 19750019357

Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., (1959), 'Theory of Plates and shells', McGraw-Hill

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (1977). The finite element method, Vol. 3. London: McGraw-Hill. Record Id: 21192356380001441

Zweiling, K. (1952). Grundlagen einer Theorie der biharmonischen Polynome. Verlag Technik.

Ziou, H., Guenfoud, H., & Guenfoud, M. (2016) Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. International Journal of Structural Engineering, 7(3): 239-261.

ANNEXES

ANNEXE I – Matrice des coordonnées nodales [A] Elément T43_Eq

	1	0	$-y_1$	x_1	0	y_1	$-2\nu x_1 y_1$	$x_1^2 - y_1^2(2+\nu)$	$-3\nu x_1^2 -3y_1^2$	$6x_1y_1$	$-3\nu x_1^2 y_1 -y_1^3$	$3x_1^2y_1 - y_1^3(2+\nu)$
	0	1	x_1	0	y_1	x_1	$y_1^2 - x_1^2(2+\nu)$	$-2\nu x_1 y_1$	$6x_1y_1$	$-3\nu y_1^2 -3x_1^2$	$3y_1^2x_1 - x_1^3(2+\nu)$	$-3\nu y_1^2 x_1 -x_1^3$
	0	0	1	0	0	0	$-2x_1$	$2y_1$	$6y_1$	$-6x_1$	$3(y_1^2-x_1^2)$	$3(y_1^2-x_1^2)$
	1	0	$-y_2$	x_2	0	y_2	$-2\nu x_2 y_2$	$x_2^2 - y_2^2(2+\nu)$	$-3\nu x_2^2 -3y_2^2$	$6x_2y_2$	$-3\nu x_2^2 y_2 -y_2^3$	$3x_2^2y_2 - y_2^3(2+\nu)$
	0	1	x_2	0	y_2	x_2	$y_2^2 - x_2^2(2+\nu)$	$-2\nu x_2 y_2$	$6x_2y_2$	$-3\nu y_2^2 -3x_2^2$	$3y_2^2x_2 - x_2^3(2+\nu)$	$-3\nu y_2^2 x_2 -x_2^3$
E.[A]=	0	0	1	0	0	0	$-2x_2$	$2y_2$	$6y_2$	$-6x_2$	$3(y_2^2-x_2^2)$	$3(y_2^2-x_2^2)$
	1	0	$-y_3$	x_3	0	y_3	$-2\nu x_3 y_3$	$x_3^2 - y_3^2(2+\nu)$	$-3\nu x_3^2 -3y_3^2$	$6x_3y_3$	$-3\nu x_3^2 y_3 -y_3^3$	$3x_3^2y_3 - y_3^3(2+\nu)$
	0	1	x_3	0	y_3	x_3	$y_3^2 - x_3^2(2+\nu)$	$-2\nu x_3 y_3$	$6x_3y_3$	$-3\nu y_3^2 -3x_3^2$	$3y_3^2x_3 - x_3^3(2+\nu)$	$-3\nu y_3^2 x_3 -x_3^3$
	0	0	1	0	0	0	$-2x_3$	$2y_3$	$6y_3$	$-6x_3$	$3(y_3^2-x_3^2)$	$3(y_3^2-x_3^2)$
	1	0	$-y_4$	x_4	0	y_4	$-2\nu x_4 y_4$	$x_4^2 - y_4^2(2+\nu)$	$-3\nu x_4^2 -3y_4^2$	$6x_4y_4$	$-3\nu x_4^2 y_4 -y_4^3$	$3x_4^2y_4 - y_4^3(2+\nu)$
	0	1	x_4	0	y_4	x_4	$y_4^2 - x_4^2(2+\nu)$	$-2\nu x_4 y_4$	$6x_4y_4$	$-3\nu y_4^2 -3x_4^2$	$3y_4^2x_4 - x_4^3(2+\nu)$	$-3\nu y_4^2 x_4 -x_4^3$
	0	0	1	0	0	0	$-2x_4$	$2y_4$	$6y_4$	$-6x_4$	$3(y_4^2-x_4^2)$	$3(y_4^2-x_4^2)$

(3.53)

ANNEXE II – Matrice $[K_0]$ Elément T43_Eq

$$[K_0] = \iint [Q]^T [D][Q] dx.dy \qquad (3.54)$$

$$H_{\alpha\beta} = \iint x^{\alpha} y^{\beta} \, dx.dy \qquad (3.55)$$

* Forme générale

$$[K_o] =$$

$$\frac{E}{\left(1-\nu^2\right)} \cdot \int\int \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2\cdot\nu\cdot y & 2\cdot y & -4\cdot x\cdot(1+\nu) \\ 2\cdot x & -2\cdot\nu\cdot x & -4\cdot y\cdot(1+\nu) \\ -6\cdot\nu\cdot x & 6\cdot x & 0 \\ 6\cdot y & -6\cdot\nu\cdot y & 0 \\ -6\cdot\nu\cdot x\cdot y & 6\cdot x\cdot y & -6\cdot x^2\cdot(1+\nu) \\ 6\cdot x\cdot y & -6\cdot\nu\cdot x\cdot y & -6\cdot y^2\cdot(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2\cdot\nu\cdot y & 2x & -6\cdot\nu\cdot x & 6\cdot y & -6\cdot\nu\cdot x\cdot y & 6\cdot x\cdot y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & -2\cdot\nu\cdot x & 6\cdot x & -6\cdot\nu\cdot y & 6\cdot x\cdot y & -6\cdot\nu\cdot x\cdot y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4\cdot x\cdot(1+\nu) & -4\cdot y\cdot(1+\nu) & 0 & 0 & -6\cdot x^2\cdot(1+\nu) & -6\cdot y^2\cdot(1+\nu) \end{bmatrix} dxdy \quad (3.56)$$

* Forme développée avant intégration analytique

$$[K_0] =$$

$$E \cdot \left[\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\left(1-\nu^2\right)} & \frac{\nu}{\left(1-\nu^2\right)} & 0 & 0 & 2x & 0 & 6y & 0 & 6xy \\
0 & 0 & 0 & \frac{\nu}{\left(1-\nu^2\right)} & \frac{1}{\left(1-\nu^2\right)} & 0 & 2y & 0 & 6x & 0 & 6xy & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{(1+\nu)} & -4x & -4y & 0 & 0 & -6x^2 & -6y^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2y & -4x & \left[4y^2+8x^2(1+\nu)\right] & \left(-4\nu xy+18xy(1+\nu)\right) & 12xy & -12y^2 & \left[12xy^2+12x^3(1+\nu)\right] & \left[-12\nu xy^2+12xy^2(1+\nu)\right] \\
0 & 0 & 0 & 2x & 0 & -4y & \left(-4\nu xy+18xy(1+\nu)\right) & \left[4x^2+8y^2(1+\nu)\right] & -12\nu x^2 & 12xy & \left(-12\nu x^2y+12x^2y(1+\nu)\right) & \left[12x^2y+12y^3(1+\nu)\right] \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6x & 0 & 12xy & -12\nu x^2 & 36x^2 & -36\nu xy & 36x^2y & -36\nu x^2y \\
0 & 0 & 0 & 6y & 0 & 0 & -12y^2 & 12xy & -36\nu xy & 36y^2 & -36\nu xy^2 & 36xy^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6xy & -6x^2 & \left[12xy^2+12x^3(1+\nu)\right] & \left(-12\nu x^2y+12x^2y(1+\nu)\right) & 36x^2y & -36\nu xy^2 & \left[36x^2y^2+18x^4(1+\nu)\right] & \left[-36\nu x^2y^2+18x^2y^2(1+\nu)\right] \\
0 & 0 & 0 & 6xy & 0 & -6y^2 & \left[-12\nu xy^2+12xy^2(1+\nu)\right] & \left[12x^2y+12y^3(1+\nu)\right] & -36\nu x^2y & 36xy^2 & \left[-36\nu x^2y^2+18x^2y^2(1+\nu)\right] & \left[36x^2y^2+18y^4(1+\nu)\right]
\end{array}\right] \quad (3.57)$$

* Forme développée après intégration analytique

$$[K_0] =$$

$$E \cdot \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dfrac{H_{00}}{\left(1-\nu^2\right)} & \dfrac{H_{00}\cdot\nu}{\left(1-\nu^2\right)} & 0 & 0 & 2\cdot H_{10} & 0 & 6\cdot H_{01} & 0 & 6\cdot H_{11} \\
0 & 0 & 0 & \dfrac{H_{00}\cdot\nu}{\left(1-\nu^2\right)} & \dfrac{H_{00}}{\left(1-\nu^2\right)} & 0 & 2\cdot H_{01} & 0 & 6\cdot H_{10} & 0 & 6\cdot H_{11} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{H_{00}}{(1+\nu)} & -4\cdot H_{10} & -4\cdot H_{01} & 0 & 0 & -6\cdot H_{20} & -6\cdot H_{02} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot H_{01} & -4\cdot H_{10} & \left[4\cdot H_{20}+8\cdot H_{20}\cdot(1+\nu)\right] & \left[-4\cdot H_{11}+18\cdot H_{11}\cdot(1+\nu)\right] & 12\cdot H_{11} & -12\cdot H_{02} & \left[12\cdot H_{12}+12\cdot H_{30}\cdot(1+\nu)\right] & \left[-12\cdot\nu H_{12}+12\cdot H_{12}\cdot(1+\nu)\right] \\
0 & 0 & 0 & 2\cdot H_{10} & 0 & -4\cdot H_{01} & \left[-4\cdot H_{11}+18\cdot H_{11}\cdot(1+\nu)\right] & \left[4\cdot H_{20}+8\cdot H_{20}\cdot(1+\nu)\right] & -12\cdot\nu\cdot H_{20} & 12\cdot H_{11} & \left[-12\cdot\nu\cdot H_{21}+12\cdot H_{21}\cdot(1+\nu)\right] & \left[12 H_{21}+12 H_{03}(1+\nu)\right] \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6\cdot H_{10} & 0 & 12\cdot H_{11} & -12\cdot H_{20} & 36\cdot H_{20} & -36\cdot H_{11} & 36\cdot H_{21} & -36\cdot\nu H_{21} \\
0 & 0 & 0 & 6\cdot H_{01} & 0 & 0 & -12\cdot H_{20} & 12\cdot H_{11} & -36\cdot H_{11} & 36\cdot H_{02} & -36\cdot\nu\cdot H_{12} & 36\cdot H_{12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6\cdot H_{11} & -6\cdot H_{20} & \left[12\cdot H_{12}+12\cdot H_{30}\cdot(1+\nu)\right] & \left[-12\cdot\nu\cdot H_{21}+12\cdot H_{21}\cdot(1+\nu)\right] & 36\cdot H_{21} & -36\cdot\nu\cdot H_{12} & \left[36\cdot H_{22}+18\cdot H_{4}\cdot(1+\nu)\right] & \left[-36\cdot\nu\cdot H_{22}+18\cdot H_{22}\cdot(1+\nu)\right] \\
0 & 0 & 0 & 6\cdot H_{11} & 0 & -6\cdot H_{20} & \left[-12\cdot\nu\cdot H_{12}+12\cdot H_{12}\cdot(1+\nu)\right] & \left[12\cdot H_{21}+12\cdot H_{03}\cdot(1+\nu)\right] & -36\cdot\nu\cdot H_{21} & 36\cdot H_{12} & \left[-36\cdot\nu\cdot H_{22}+18\cdot H_{22}\cdot(1+\nu)\right] & \left[36\cdot H_{22}+18\cdot H_{04}\cdot(1+\nu)\right]
\end{bmatrix} \qquad (3.58)$$

ANNEXE III – Formulation des champs d'approximation à partir des solutions homogènes (Polynômes bi-harmoniques) de la fonction d'Airy

III.a. Champs des déformations

N°	$F = P_{i,j}(x,y)$	$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$	$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)$	$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)$
1	1	0	0	0	0	0	0
2	x	0	0	0	0	0	0
3	y	0	0	0	0	0	0
4	$\frac{(\nu.x^2+y^2)}{2(1-\nu^2)}$	$\frac{\nu}{1-\nu^2}$	$\frac{1}{1-\nu^2}$	0	$\frac{1}{E}$	0	0
5	$\frac{(x^2+\nu.y^2)}{2(1-\nu^2)}$	$\frac{1}{1-\nu^2}$	$\frac{\nu}{1-\nu^2}$	0	0	$\frac{1}{E}$	0
6	$\frac{-x.y}{(1+\nu)}$	0	0	$\frac{-1}{(1+\nu)}$	0	0	$\frac{2}{E}$
7	$x^2.y$	2y	0	2x	$\frac{-2.\nu.y}{E}$	$\frac{2.y}{E}$	$-4x(1+\nu)/E$
8	$x.y^2$	0	2x	2y	$\frac{2.x}{E}$	$\frac{-2.\nu.x}{E}$	$-4y(1+\nu)/E$
9	x^3	6x	0	0	$\frac{-6.\nu.x}{E}$	$\frac{6.x}{E}$	0
10	y^3	0	6y	0	$\frac{6.y}{E}$	$\frac{-6.\nu.y}{E}$	0
11	$x^3.y$	6x.y	0	$3x^2$	$\frac{-6.\nu.x.y}{E}$	$\frac{6.x.y}{E}$	$-6x^2(1+\nu)/E$
12	$x.y^3$	0	6x.y	$3y^2$	$\frac{6.x.y}{E}$	$\frac{-6.\nu.x.y}{E}$	$-6y^2(1+\nu)/E$

(3.59)

III.b. Champs des déplacements

N°	Para-mètres d’interpol a-tion	Déformation			Déplacements		Rotation			
		$E.\varepsilon_x$	$E.\varepsilon_y$	$E.\gamma_{xy}$	E.u	E.v	$\frac{\partial V}{\partial x}$	$\frac{\partial U}{\partial y}$	$E.\theta_z = \frac{1}{2}\bullet\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)$	
1	a_1	0	0	0	1	0	0	0	0	
2	a_2	0	0	0	0	1	0	0	0	
3	a_3	0	0	0	-y	x	1	-1	1	
4	a_4	1	0	0	x	0	0	0	0	
5	a_5	0	1	0	0	y	0	0	0	(3.60)
6	a_6	0	0	2	y	x	1	1	0	
7	a_7	$-2.\nu.y$	$2.y$	$-4x(1+\nu)$	$-2.\nu.x.y$	$y^2 - x^2(2+\nu)$	$-2x(2+\nu)$	$-2.\nu.x$	$-2.x$	
8	a_8	$2.x$	$-2.\nu.x$	$-4y(1+\nu)$	$x^2 - y^2(2+\nu)$	$-2.\nu.x.y$	$-2.\nu.y$	$-2.y(2+\nu)$	$2.y$	
9	a_9	$-6.\nu.x$	$6.x$	0	$-3.\nu.x^2 - 3y^2$	$6.x.y$	$6.y$	$-6y$	$6.y$	
10	a_{10}	$6.y$	$-6.\nu.y$	0	$6.x.y$	$-3.\nu.y^2 - 3x^2$	$-6x$	$6.x$	$-6.x$	
11	a_{11}	$-6.\nu.x.y$	$6.x.y$	$-6x^2(1+\nu)$	$-3.\nu.x^2.y - y^3$	$3.x.y^2 - x^3(2+\nu)$	$3.y^2 - 3.x^2(2+\nu)$	$-3.\nu.x^2 - 3.y^2$	$3.(y^2 - x^2)$	
12	a_{12}	$6.x.y$	$-6.\nu.x.y$	$-6y^2(1+\nu)$	$3.x^2.y - y^3(2+\nu)$	$-3.\nu.x.y^2 - x^3$	$-3.\nu.y^2 - 3.x^2$	$3.x^2 - 3.y^2(2+\nu)$	$3.(y^2 - x^2)$	

ANNEXE IV – ELEMENT FINI DE PLAQUE MINCE

*** Forme générale de $[K_0]$ avant intégration**

$$[K_0]=$$

$$\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\iint\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\x&0&0\\y&0&2x\\xy&0&x^2\\0&1&0\\0&x&2y\\0&y&0\\0&xy&y^2\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{bmatrix}1&\nu&0\\\nu&1&0\\0&0&\frac{(1-\nu)}{2}\end{bmatrix}.\begin{pmatrix}0&0&0&1&x&y&xy&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&x&y&xy&0\\0&0&0&0&0&2x&x^2&0&2y&0&y^2&1\end{pmatrix}dx\,dy \tag{3.61}$$

*** Forme développée de $[K_0]$ avant intégration analytique**

$$[K_0]=\frac{E.h^3}{12.(1-\nu^2)}\times\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\&&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\&&&1&x&y&x.y&\nu&\nu.x&\nu.y&\nu.x.y&0\\&&&&x^2&x.y&x^2.y&\nu.x&\nu.x^2&\nu.x.y&\nu.x^2.y&0\\&&&&&4.x^2.d+y^2&2.x^3.d+x.y^2&\nu.y&x.y.(\nu+4.d)&\nu.y^2&x.y^2.(\nu+2.d)&2.x.d\\&&&&&&x^4.d+x^2.y^2&\nu.x.y&x^2.y.(\nu+2.d)&\nu.x.y^2&x^2.y^2.(\nu+d)&x^2.d\\&&&&&&&1&x&y&x.y&0\\&&&&&\text{Sym.}&&&x^2+4.y^2.d&x.y&x^2.y+2.y^3.d&2.y.d\\&&&&&&&&&y^2&x.y^2&0\\&&&&&&&&&&x^2.y^2+y^4.d&y^2.d\\&&&&&&&&&&&d\end{bmatrix} \tag{3.62}$$

*** Forme développée de $[K_0]$ après intégration analytique**

$$[K_0]=\frac{E.h^3}{12.(1-\nu^2)}\times$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\&&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\&&&H_{00}&H_{10}&H_{01}&H_{11}&\nu.H_{00}&\nu.H_{10}&\nu.H_{01}&\nu.H_{11}&0\\&&&&H_{20}&H_{11}&H_{21}&\nu.H_{10}&\nu.H_{20}&\nu.H_{11}&\nu.H_{21}&0\\&&&&&4.H_{20}.d+H_{02}&2.H_{30}.d+H_{12}&\nu.H_{01}&H_{11}.(\nu+4.d)&\nu.H_{02}&H_{12}.(\nu+2.d)&2.H_{10}.d\\&&&&&&H_{40}.d+H_{22}&\nu.H_{11}&H_{21}.(\nu+2.d)&\nu.H_{12}&H_{22}.(\nu+d)&H_{20}.d\\&&&&&&&H_{00}&H_{10}&H_{01}&H_{11}&0\\&&&&&\text{Sym.}&&&H_{20}+4.H_{02}.d&H_{11}&H_{21}+2.H_{03}.d&2.H_{01}.d\\&&&&&&&&&H_{02}&H_{12}&0\\&&&&&&&&&&H_{22}+H_{04}.d&H_{02}.d\\&&&&&&&&&&&H_{00}d\end{bmatrix} \tag{3.63}$$

Avec : $d=\left(\frac{1-\nu}{2}\right)$ et $H_{\alpha\beta}=\iint x^{\alpha}y^{\beta}dx.dy$

ANNEXE V – Intégration analytique sur un triangle

L'évaluation par intégration numérique (cas des éléments isoparamètrique) sur un élément triangulaire (de type Hammer dans ce cas) des différents vecteurs et matrices nécessaires pour une analyse quelconque par éléments finis génère les problèmes suivants :

- Altération de la précision pour les maillages distordus géométriquement, particulièrement lorsque les champs d'approximation sont (les polynômes d'interpolations) de degré élevé.
- Le blocage de la solution dans le cas des structures minces.

L'utilisation de l'intégration analytique était très délicate et pratiquement impossible jusqu'à un certain temps, avant l'apparition des machines puissantes et d'outil de calcul utilisant le calcul symbolique. Actuellement, l'intégration analytique sur un domaine bidimensionnel (triangle et quadrangle) devient possible suite aux logiciels dédiés pour ce but (Mathematica).

L'évaluation de la matrice $[K_0] = \int_S [Q(x.y)]^T [D].[Q(x.y)].dS$ analytiquement est maintenant possible et elle permet d'éviter les problèmes cités en haut. Une démarche simple optée par plusieurs auteurs : Onate (2009), Hamadi et al. (2006), Belarbi (2000), Himeur et al. (2008) et Guenfoud (2018), consiste en la formulation d'une formule universelle aisé à mettre en œuvre et permettant une estimation automatique de la matrice $[K_0]$, ceci quel que soit le degré du polynôme résultat du produit $[Q_0] = [Q(x.y)]^T [D].[Q(x.y)]$ et quel que soit la distorsion de l'élément. Cette méthode se présente comme suit : Soit un élément fini (triangulaire par exemple) (figure 3.24).

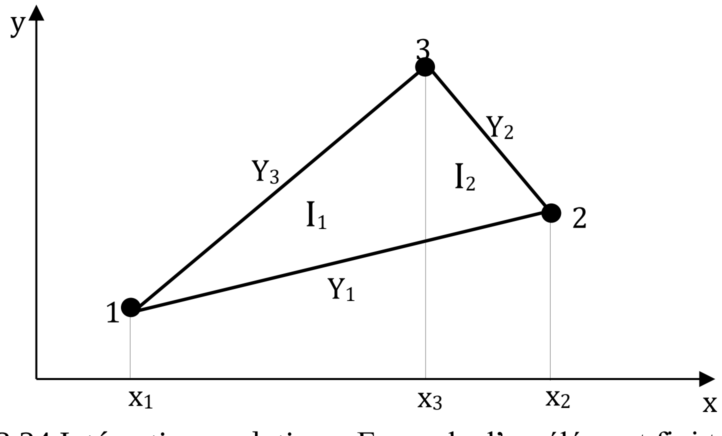


Figure 3.24 Intégration analytique, Exemple d'un élément fini triangulaire

Les termes de la matrice résultat du produit $[Q_0] = [Q(x.y)]^T [D].[Q(x.y)]$ sont sous l'allure $C.x^{\alpha}.y^{\beta}$. Donc l'intégration de la formule $\int_S [Q(x.y)]^T [D].[Q(x.y)].dS$ revient à intégrer chacun des termes de la matrice $[Q_0]$, qui se mis sous la forme :-

$$I = \int_x \int_y C.x^{\alpha}.y^{\beta}.dx.dy \tag{3.64}$$

Avec : $I = I_1 + I_2$ et C : une constante.

- I_1 représente l'intégrale entre les droites Y_1 et Y_3 dans le sens des *y* et entre x_1 et x_3 dans le sens des *x*.
- I_2 représente l'intégrale entre les droites Y_1 et Y_2 dans le sens des *y* et entre x_3 et x_2 dans le sens des *x*.

Les valeurs de I_1 et I_2 sont données comme suit :

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_3}\int_{Y_1}^{Y_3} C.x^{\alpha}.y^{\beta}dx.dy \qquad I_2 = \int_{x_3}^{x_2}\int_{Y_1}^{Y_2} C.x^{\alpha}.y^{\beta}dx.dy \tag{3.65}$$

Y : représente l'ordonnée de la droite d'équation y = a.x + b.

donc pour β = 2, nous aurons $y^2 = (a.x + b)^2 = \mathbf{1}.a^2.x^2 + \mathbf{2}.a.b.x + \mathbf{1}.b^2$,

pour β = 3, nous aurons $y^3 = (a.x + b)^3 = \mathbf{1}.a^3.x^3 + \mathbf{3}.a^2.b.x^2 + \mathbf{3}.a.b^2.x + \mathbf{1}.b^3$,

Ainsi, selon la valeur de β, on aboutit à la forme générale suivante :

$$y^{\beta} = (a.x+b)^{\beta} = \sum_{k=1}^{k=\beta+1} C(k).a^{\beta+1-k}.b^{k-1}.x^{\beta+1-k} = \sum_{k=1}^{k=\beta+1} C(k).a^{k-1}.b^{\beta+1-k}.x^{k-1} \tag{3.66}$$

$C(k)$ sont des coefficients dont le nombre et la valeur sont fonction de la valeur de β (voir tableau 3.11).

La sommation continue $\int y^{\beta} dy$ prend la forme :

$$\int y^{\beta} dy = \frac{1}{\beta+1} y^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1}(a.x+b)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1}\sum_{k=1}^{k=\beta+2} C(k).a^{k-1}.b^{\beta+2-k}.x^{k-1} \tag{3.67}$$

Tableau 3.11 : Valeur des coefficients C(k) en fonction de β

	$C(k)$, k=1,6					
	$C(1)$	$C(2)$	$C(3)$	$C(4)$	$C(5)$	$C(6)$
β =0	1	-	-	-	-	-
β =1	1	1	-	-	-	-
β =2	1	2	1	-	-	-
β =3	1	3	3	1	-	-
β =4	1	4	6	4	1	-
β =5	1	5	10	10	5	1

Pour des bornes d'intégration formées des droites d'équations $Y_i = a_i.x + b_i$ et $Y_j = a_j.x + b_j$, l'équation (3.67) devient :

$$\int_{Y_i}^{Y_j} y^{\beta} dy = \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} C(k).(a_j^{\,k-1}.b_j^{\,\beta+2-k} - a_i^{\,k-1}.b_i^{\,\beta+2-k}).x^{k-1} \tag{3.68}$$

L'évaluation de l'intégrale de l'équation (3.68) par rapport aux limites d'intégration x_m et x_n nous permet d'écrire :

$$\int_{x_m}^{x_n} x^{\alpha} \left(\int_{Y_i}^{Y_j} y^{\beta} dy \right).dx = \int_{x_m}^{x_n} \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} C(k).(a_j^{\,k-1}.b_j^{\,\beta+2-k} - a_i^{\,k-1}.b_i^{\,\beta+2-k}).x^{k+\alpha-1}.dx \tag{3.69}$$

L'expression définitive de l'intégrale (3.64) prend la forme :

$$I_p = C.\frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} \frac{1}{k+\alpha} C(k).(a_j^{\,k-1}.b_j^{\,\beta+2-k} - a_i^{\,k-1}.b_i^{\,\beta+2-k}).(x_n^{\,k+\alpha} - x_m^{\,k+\alpha}) \tag{3.70}$$

Pour le cas d'un triangle nous avons p=2

$$I = \sum_{p=1}^{2} I_p \tag{3.71}$$

ANNEXE VI – Condensation statique

La condensation statique est une technique qui opine de libérer des degrés de liberté d'un élément en opérant sur le système d'équation régissant l'équilibre de l'élément (Sarf 1991), par la simplification de ses composantes (matrice de rigidité, vecteurs de charges). L'idée essentielle est d'exprimer les variables inconnues relatives aux degrés de liberté à écarter du système d'équations en fonction des variables inconnues à retenir, d'où la réduction du nombre d'équations à celui des inconnues restantes. Le privilégie étant la réduction du temps de calcul pour la résolution du système d'équations, l'utilisation limitée de la capacité mémoire et l'élimination des DDL liés aux nœuds esclaves. Cette technique est une méthode de calcul agissant au niveau élémentaire (avant assemblage). Les étapes de calcul sont les suivants. Dans la méthode des éléments finis, l'équilibre statique élémentaire est gouverné par un système d'équation de type :

$$[K]\{U\} = \{F\} \tag{3.72}$$

Tel que : $[K]$: La matrice de rigidité de l'élément,

$\{U\}$: Les déplacements nodaux,

$\{F\}$: Le vecteur chargement.

Indiquons par l'indice *e* les équations à éliminer et par l'indice *c* les équations à garder, puis divisons les composantes du système d'équations comme c'est illustré aux tableaux 3.12 à 3.14.

Tableau 3.12 : Partition de la matrice de rigidité

	DDL à Garder	DDL à éliminer
DDL à garder	$[K_{cc}]$	$[K_{ce}]$
DDL à éliminer	$[K_{ec}]$	$[K_{ee}]$

Tableau 3.13 : Partition du vecteur des déplacements

DDL à garder	$\{U_c\}$
DDL à éliminer	$\{U_e\}$

Tableau 3.14 : Partition du vecteur des charges équivalentes extérieures

DDL à garder	$\{F_c\}$
DDL à éliminer	$\{F_e\}$

Commençant de cette partition, la relation (3.72) devient:

$$\begin{bmatrix} [K_{cc}] & [K_{ce}] \\ [K_{ec}] & [K_{ee}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c \\ U_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c \\ F_e \end{Bmatrix} \tag{3.73}$$

A partir du système (3.73), nous pouvons soustraire le vecteur des déplacements $\{U_e\}$ (des DDL à éliminer) :

$$\{U_e\} = -[K_{ec}][K_{ee}]^{-1}.\{U_c\} + [K_{ee}]^{-1}.\{F_e\} \tag{3.74}$$

$$\{U_c\} = -[K_{ce}][K_{cc}]^{-1}.\{U_e\} + [K_{cc}]^{-1}.\{F_c\} \tag{3.75}$$

Le but est d'éliminer les DDL associés au nœud interne. En imposant que la composante du vecteur des charges extérieures $\{F_e\} = 0$ et en remplaçant $\{U_e\}$ de l'équation (3.75) par sa valeur donnée par l'équation (3.74) nous déduisons :

$$\{U_c\} = [K_{ce}][K_{cc}]^{-1}.[K_{ec}][K_{ee}]^{-1}.\{U_c\} + [K_{cc}]^{-1}.\{F_c\} \tag{3.75}$$

Cette dernière relation (3.75) se réduit pour livrer une forme semblable aux équations de l'équilibre statique dans la méthode des éléments finis :

$$[[K_c] - .[K_{ce}].[K_{ee}]^{-1}.[K_{ec}]]\{U_c\} = \{F_c\} \tag{3.76}$$

La matrice $\left[\overline{K}\right]=\left[\left[K_{cc}\right]-\left[K_{ce}\right].\left[K_{ee}\right]^{-1}.\left[K_{ec}\right]\right]$ forme la matrice de rigidité condensée et le système d'équation (3.72) se réduit au système suivant :

$$\left[\overline{K}\right]\{U_c\}=\{F_c\} \qquad (3.77)$$

La relation (3.77) ne contient donc que les paramètres (inconnus) liés aux DDL à garder.

Chapitre 4

Elément de coque pour les FGM

SOMMAIRE

Chapitre 4 : Elément de coque pour les FGM

4.1. Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons pu développer un élément spécial de coque mince triangulaire, à facette plane, à trois nœuds et à six degrés de liberté par nœuds en se basant sur la formulation en déformation. La finalité du présent chapitre est d'adapter l'élément développé pour qu'il puisse être applicable aux structures coque en matériaux à gradient de propriété fonctionnel (FGM). La particularité des structures coque en FGM en comparant avec celles en matériaux homogènes isotropes est l'existence d'une matrice de couplage entre le mode de déformation membranaire et le mode flexionnel ; ainsi l'intégration sur la coordonnée z n'est plus constante suite à la dépendance des caractéristiques mécaniques ($E(z)$ et $\nu(z)$) de la coordonnée z. Les matrices de rigidités liant les contraintes aux déformations deviennent fonction polynomiale de la coordonnée z.

Toutefois le problème de compatibilité reste poser suite au travail de l'élément membranaire de classe C° en contre partie à l'élément flexionnel de classe C^1 dans la formulation classique des éléments finis, ce qui soulève les problématiques suivantes :

- La pauvreté en déplacement de l'élément membranaire lors de son utilisation à des problèmes à flexion dominante, ce qui impose l'utilisation de maillage très fin dans le but de se rapprocher de la géométrie curviligne d'une part et de se converger vers la solution réelle par un enrichissement de la solution en mode h.
- La continuité inter élément et la conformité lors de l'utilisation de l'élément membranaire de classe C° en conjonction avec l'élément de plaque mince de classe C^1.
- L'absence de la rigidité propre au sixième degré de liberté dans le cas des éléments coplanaires.

L'objectif du présent chapitre consiste à trouver des solutions à ces problèmes où de les éviter plus précisément dans le cas de la modélisation des coques en composite (FGM). Nous atteindrons cet objectif par le développement d'un élément de coque spécial, pour la modélisation des structures en FGM, à facette plane toujours basé sur la formulation en déformation. Il est construit par la superposition d'un élément de membrane et d'un élément de plaque en flexion tous deux dédiés pour les FGM. A cet effet, une matrice de couplage membrane-flexion est nécessaire. Dans ce qui suit nous exposons le développement des différentes matrices (membrane, flexion et couplage membrane-flexion).

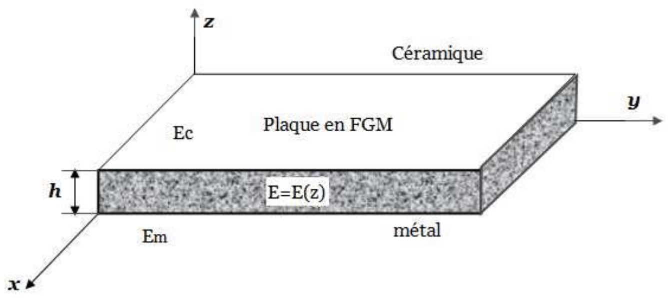


Figure 4.1 Structure d'une plaque en FGM

4.2. Formulation de l'élément de membrane pour les FGM

4.2.1. Elément membranaire «$T_{43_Eq_FGM}$»

L'élément visé n'est autre que l'élément de membrane T_{43_Eq} développé par Himeur (2008) et Guenfoud H. (2018) au chapitre trois dans la section 3.2 généralisé aux matériaux composites de type FGM. Il est donc triangulaire à quatre nœuds et à trois degrés de liberté par nœud (les deux translations u et v et la rotation autour de la normale θ_z (Drilling Rotation)) dans son repère local, figure (4.2.).

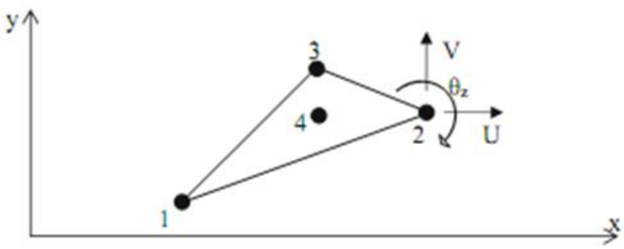


Figure 4.2. Elément triangulaire membranaire à quatre nœuds "$T_{43_Eq_FGM}$"
Et à trois DDL par nœud (deux translations u et v et la rotation θ_z)

Les ingrédients nécessaires pour la construction de la matrice de rigidité du présent élément sont :

- La matrice des coordonnées nodales élémentaire $[A]$ (voir équation (2.15) chapitre 3), qu'on va la noter dans le présent chapitre par : $[A_{T43_Eq_FGM}]$. Elle dépend nécessairement des coordonnées locales x et y des nœuds, du module d'élasticité E(z) et du coefficient de Poisson ν(z).

$$[A_{T43_Eq_FGM}] = \frac{1}{E(z)} \begin{bmatrix} f(x_1, y_1, z) \\ f(x_2, y_2, z) \\ f(x_3, y_3, z) \\ f(x_4, y_4, z) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Tel que

$$[f(x,y,z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & 0 & y & -2\nu xy & (x^2 - y^2(2+\nu)) & -3(\nu x^2 + y^2) & 6xy & (-3\nu x^2 y - y^3) & (3x^2 y - y^3(2+\nu)) \\ 0 & 1 & x & 0 & y & x & (y^2 - x^2(2+\nu)) & -2\nu xy & 6xy & -3(\nu y^2 + x^2) & (3y^2 x - x^3(2+\nu)) & (-3\nu y^2 x - x^3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2x & 2y & 6y & -6x & 3(y^2 - x^2) & 3(y^2 - x^2) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

exprimée au quatre nœuds de l'élément. Et :

$$E(z) = (E_c - E_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p + E_m$$

- La matrice de déformation [Q] donnée par l'équation (3.20) du chapitre 3. Cette matrice dépend essentiellement des coordonnées locales x et y des nœuds de l'élément et des caractéristiques mécaniques (E(z) et ν(z)) du matériau (FGM dans notre cas) constituant l'élément. On va la désignée par $[Q_{T43_Eq_FGM}]$.

$$[Q_{T43_Eq_FGM}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2\nu\nu & 2x & -6\nu\nu & 6y & -6\nu\nu x & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & -2\nu\nu & 6x & -6\nu\nu & 6xy & -6\nu\nu x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4x(1+\nu) & -4y(1+\nu) & 0 & 0 & -6x^2(1+\nu) & -6y^2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

- La matrice des fonctions de forme exprimé en fonction de la matrice des coordonnées $[A]$, de la matrice polynomiale $[f(x,y,z)]$ et du module d'élasticité E(z) du composite FGM. Elle est donnée par l'expression :

$$[N_{T43_Eq_FGM}] = \frac{1}{E(z)}[f(x,y,z)][A_{T43_Eq_FGM}]^{-1} \quad (4.3)$$

Ainsi, pour le cas plan des contraintes et pour les FGM les contraintes sont liées aux déformations infinitésimales par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Qu'on peut l'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\{\sigma_{T43_Eq_FGM}\} = [C_{T43_Eq_FGM}]\{\varepsilon_{T43_Eq_FGM}\} \quad (4.5)$$

Il est à noter, que dans la présente étude le coefficient de Poisson est pris constant (hypothèse généralement prise par plusieurs chercheurs dont Delale (1983), Guenfoud H. (2016, 2017) et Ziou (2016, 2017)).

4.2.2. Matrice de rigidité membranaire $[\mathbf{K}^{e}_{T43_Eq_FGM}]$

Le principe des travaux virtuels pour un élément fini après discrétisation s'écrit :

$$(\delta W_{int})^e = (\delta W_{ext})^e \quad (4.6)$$

Tel que $(\delta W_{int})^e$ est le travail virtuel élémentaire interne dépendant des paramètres internes (Contraintes et déformations) et $(\delta W_{ext})^e$ est le travail virtuel élémentaire externe dépendant des paramètres externes (déplacements et forces).

Le principe s'énonce comme suit : Le travail virtuel interne est égal au travail virtuel externe pour tout déplacement virtuel cinématiquement admissible.

Pour le cas de notre élément, le travail virtuel interne élémentaire s'exprime par une intégrale sur le volume élémentaire du produit des déformations virtuelles par les contraintes, d'où :

$$(\delta W_{int})^e = \int_{V^e} \delta\{\varepsilon_{T43_Eq_FGM}\}^T [\sigma_{T43_Eq_FGM}] dV^e \tag{4.7}$$

Connaissant que :

$$\begin{gathered}\{\varepsilon_{T43_Eq_FGM}\} = [N'_{T43_Eq_FGM}]\{q^e_{T43_Eq_FGM}\} \\ \{\varepsilon_{T43_Eq_FGM}\} = \left[Q_{T43_{Eq_{FGM}}}(x,y,z)\right][A_{T43_Eq_FGM}]^{-1}\{q^e_{T43_Eq_FGM}\}\end{gathered} \tag{4.8}$$

Et que :

$$\{\sigma_{T43_Eq_FGM}\} = [C_{T43_Eq_FGM}]\{\varepsilon_{T43_Eq_FGM}\} \tag{4.9}$$

Et en remplaçant dans l'expression (4.7) $\{\varepsilon_{T43_Eq_FGM}\}$ et $\{\sigma_{T43_Eq_FGM}\}$ par leurs valeurs données, respectivement dans les équations (4.8) et (4.9), on obtient :

$$\begin{gathered}(\delta W_{int})^e = \delta\{q^e_{T43_Eq_FGM}\}^T \left(\int_{V^e} [Q_{T43_Eq_FGM}(x,y,z)]^T [A_{T43_Eq_FGM}{}^{-1}]^T \right. \\ \left. [C_{T43_Eq_FGM}] \left[Q_{T43_{Eq_{FGM}}}(x,y,z)\right][A_{T43_Eq_FGM}]^{-1} dV^e\right)\{q^e_{T43_Eq_FGM}\}\end{gathered} \tag{4.10}$$

La matrice de rigidité de l'élément membranaire en FGM s'obtient à partir de l'expression entre parenthèse de l'équation (4.10). L'intégration sur le volume de l'élément se décompose en une intégration bidimensionnelle sur la surface de l'élément et une intégration unidimensionnelle sur l'épaisseur de l'élément. Donc, $dV^e = dA^e.dz = dz.(dx.dy)$.

En conséquence, la matrice de rigidité élémentaire pour le cas d'un matériau FGM tirée de l'expression (4.10) devient :

$$\begin{gathered}[K_{T43_Eq_FGM}]^e = \left(\int_{V^e} [Q_{T43_Eq_FGM}(x,y,z)]^T [A_{T43_Eq_FGM}{}^{-1}]^T \right. \\ \left. [C_{T43_Eq_FGM}] \left[Q_{T43_{Eq_{FGM}}}(x,y,z)\right][A_{T43_Eq_FGM}]^{-1} dz.(dx.dy)\right)\end{gathered} \tag{4.11}$$

4.3. Formulation de l'élément de plaque en flexion pour les FGM

4.6.1. Elément de plaque mince «PM_{T43_FGM}»

Au chapitre précédent, nous avons décrit les étapes de construction de l'élément de plaque mince (hypothèse de Kirchhoff) triangulaire à quatre nœuds développé par Himeur (2014) et Guenfoud (2018). Cet élément est destiné pour un matériau isotrope. La généralisation de l'élément pour les FGM est le but du présent paragraphe. L'élément est de forme triangulaire à quatre nœuds et à trois de degré de liberté par nœud (deux rotations et une translation transversal), figure 4.3. Il est basé sur la formulation en déformation.

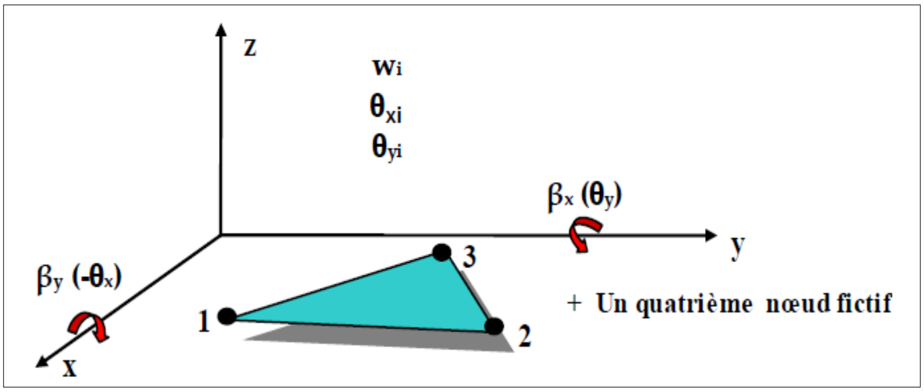


Figure 4.3 Elément triangulaire de plaque mince
à trois degrés de liberté par nœud (w, Θ_x, Θ_y) pour les FGM (PM_{T43_FGM})

Pour la construction de la matrice de rigidité du présent élément de plaque en flexion dédié pour les matériaux composites à distribution graduel de ses caractéristiques, nous avons besoin des apports suivants ;

- La matrice des coordonnées nodales élémentaire $[A]$ (voir équation (3.21) chapitre 3). On la désigne dans le présent chapitre par : $[A_{PMT43_FGM}]$. Elle dépend nécessairement des coordonnées locales x et y des quatre nœuds de l'élément et de la fonction polynomiale d'interpolation du champ de déplacement f(x,y) comme suit :

$$[A_{PMT43_FGM}] = \begin{bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \\ f(x_4, y_4) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Tel que

$$[f(x,y)] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{6} & -\frac{x^2.y}{2} & -\frac{x^3.y}{6} & -\frac{y^2}{2} & -\frac{x.y^2}{2} & -\frac{y^3}{6} & -\frac{x.y^3}{6} & -\frac{x.y}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & \frac{x^2}{2} & x.y & \frac{x^2.y}{2} & 0 & \frac{y^2}{2} & 0 & \frac{y^3}{6} & \frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{6} & y & x.y & \frac{y^2}{2} & \frac{x.y^2}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

exprimée au quatre nœuds de l'élément.

- La matrice de déformation [Q] donnée par l'équation (3.25) du chapitre 3 se dérive principalement des coordonnées locales x et y des nœuds de l'élément. Elle est donnée par :

$$[Q(x,y)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.x & x^2 & 0 & 2.y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Elle est désignée par $\left[Q_{PMT43_FGM}\right]$.

- La matrice des fonctions de forme formulée en fonction de la matrice des coordonnées nodales $[A]$ et de la matrice polynomiale $[f(x,y)]$. Elle est donnée par l'expression (3.23) du chapitre 3 :

$$\left[N_{PMT43_FGM}\right] = [f(x,y)]\left[A_{PMT43_FGM}\right]^{-1} \tag{4.15}$$

Ainsi, pour le cas plan des contraintes et pour les FGM les contraintes sont liées aux déformations infinitésimales par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{-zE(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{4.16}$$

Qui dépend de la coordonnée z à travers : $E(z) = (E_c - E_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p + E_m$.

En terme de relation "Moments - Courbures" cette relation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{-\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{-2\,\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{4.17}$$

Avec

$$D = \frac{1}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{+h/2} E(z) z^2 dz \tag{4.18}$$

Il est à noter, qu'ici dans notre étude le coefficient de Poisson est pris constant (hypothèse généralement prise par plusieurs chercheurs dont Guenfoud (2016, 2017) et Ziou (2016, 2017)) et $E(z) = (E_c - E_m)\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^p + E_m$.

4.3.2 Matrice de rigidité élémentaire $[K^e_{pmT43_FGM}]$

Le travail virtuel élémentaire intérieur discrétisé s'exprime comme suit :

$$(\delta W_{int})^e = \int_{V^e} \delta\{\varepsilon_{pmT43_FGM}\}^T \{\sigma_{pmT43_FGM}\} dV^e \tag{4.19}$$

Nous savons que :

$$\begin{gathered}\{\varepsilon_{pmT43_FGM}\} = [N'_{pmT43_FGM}]\{q^e_{pmT43_FGM}\} \\ \{\varepsilon_{pmT43_FGM}\} = [Q_{pmT43_{FGM}}(x,y,z)][A_{pmT43_FGM}]^{-1}\{q^e_{pmT43_FGM}\}\end{gathered} \tag{4.20}$$

Et

$$\{\sigma_{pmT43_FGM}\} = [C_{pmT43_FGM}]\{\varepsilon_{pmT43_FGM}\} \tag{4.21}$$

Par substitution dans l'expression (4.19), $\{\varepsilon_{pmT43_FGM}\}$ et $\{\sigma_{pmT43_FGM}\}$ par leurs formules données en (4.20) et (4.21) respectivement, nous obtenons :

$$\begin{gathered}(\delta W_{int})^e = \delta\{q^e_{pmT43_{FGM}}\}^T \left(\int_V [Q_{pmT43_{FGM}}(x,y)]^T [A_{pmT43_{FGM}}{}^{-1}]^T [C_{pmT43_{FGM}}] \right. \\ \left. [Q_{pmT43_FGM}(x,y)][A_{pmT43_FGM}]^{-1} dV^e\right)\{q^e_{pmT43_FGM}\}\end{gathered} \tag{4.22}$$

De ce fait, la matrice de rigidité élémentaire est représentée par l'expression entre parenthèse de l'équation (4.22), elle s'écrit comme suit :

$$\begin{gathered}[K^e_{pmT43_FGM}] = \left(\int_V [Q_{pmT43_{FGM}}(x,y)]^T [A_{pmT43_{FGM}}{}^{-1}]^T [C_{pmT43_{FGM}}] \right. \\ \left. [Q_{pmT43_FGM}(x,y)][A_{pmT43_FGM}]^{-1} dV^e\right)\end{gathered} \tag{4.23}$$

Avec
$$[C_{pm}] = \frac{\int_{-h/2}^{+h/2} E(z) z^2 dz}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

L'évaluation de cette matrice de rigidité est établie par intégration analytique des différentes composantes, dont les expressions sont de la forme $H_{\alpha x\beta} = Cx^\alpha y^\beta$.

Finalement la matrice de rigidité élémentaire de la plaque mince FGM à considérer à l'assemblage des différentes matrice pour construire la matrice de rigidité globale de la

structure, est celle obtenue après condensation de la matrice $\left[K^{e}_{pmT43_FGM}\right]$ pour éliminer les degrés de libertés du quatrième nœuds (nœud esclave).

4.4. Formulation de l'élément de couplage membrane-flexion pour les FGM

Au chapitre trois dédié au matériau isotrope n'apparait pas une matrice de couplage entre le mode de déformation membranaire et celui de flexion suite aux raisons suivantes :

- Le matériau est isotrope, donc le plan moyen de la coque se trouve à mi- portée entre les deux faces extrêmes de l'élément de coque (couplage dû au comportement mécanique).
- L'élément fini de la coque est supposé à facette plane, ce qui élimine le phénomène de couplage entre la membrane et la flexion pouvant apparaitre si l'élément est courbe (couplage dû à la géométrie courbe).

Dans le cas de la modélisation des coques en FGM, bien que l'élément considéré soit à facette plane, un couplage entre les deux modes de déformations (membrane et flexion) se produit en créant ainsi une matrice de couplage membrane flexion qui n'apparut pas dans le cas des matériaux isotropes. La raison de ce phénomène revient à l'existence de la coordonnée z dans les expressions des déformations (membrane et flexion) avec différents exposants (paire et impaire) d'une part et les bornes d'intégrations sur z qui ne sont plus entre $\mp\frac{h}{2}$.

<u>Rigidité de couplage membrane-flexion</u>

La rigidité de couplage membrane-flexion vient du travail virtuel de l'effet de la membrane sur la flexion d'une part et de l'effet de la flexion sur la membrane d'autre part. En effet, ce travail est le résultat du produit de la déformation virtuelle de membrane multiplié par le tenseur de contrainte due à la flexion en plus du produit de la déformation virtuelle de la flexion multiplié par le tenseur de contrainte due à la membrane.

Ce qui peut être traduit par :

$$(\delta W_{int})^{e} = \int_{V^{e}} \delta\left\{\varepsilon_{T43_Eq_FGM}\right\}^{T}\left[\sigma_{pmT43_FGM}\right]dV^{e} + \int_{V^{e}} \delta\left\{\varepsilon_{pmT43_FGM}\right\}^{T}\left[\sigma_{T43_Eq_FGM}\right]dV^{e} \qquad (4.24)$$

Avec :

$$\left\{\delta\varepsilon_{T43_Eq_FGM}\right\} = \left[N'_{T43_Eq_FGM}\right]\left\{\delta q^{e}_{T43_Eq_FGM}\right\}$$
$$\left\{\delta\varepsilon_{T43_Eq_FGM}\right\} = \left[Q_{T43_Eq_FGM}\right]\left[A_{T43_Eq_FGM}\right]^{-1}\left\{\delta q^{e}_{T43_Eq_FGM}\right\} \qquad (4.25)$$

Et

$$\{\sigma_{pmT43_FGM}\} = [C_{pmT43_FGM}]\{\varepsilon_{pmT43_FGM}\} \tag{4.26}$$

Ainsi,

$$\{\delta\varepsilon_{pmT43_FGM}\} = [N'_{pmT43_FGM}]\{\delta q^{e}_{pmT43_FGM}\}$$
$$\{\delta\varepsilon_{pmT43_FGM}\} = [Q_{pmT43_FGM}][A_{pmT43_FGM}]^{-1}\{\delta q^{e}_{pmT43_FGM}\} \tag{4.27}$$

Et

$$\{\sigma_{T43_Eq_FGM}\} = [C_{T43_Eq_FGM}]\{\varepsilon_{T43_Eq_FGM}\} \tag{4.28}$$

En substituant les expressions (4.25) – (4.28) dans la relation donnant le travail virtuel interne élémentaire, nous obtenons ce qui suit :

$$(\delta W_{int})^{e} = \int_{V^{e}} \left([Q_{T43_Eq_FGM}][A_{T43_Eq_FGM}]^{-1}\{\delta q^{e}_{T43_Eq_FGM}\}\right)^{T} [C_{pmT43_FGM}]$$
$$\left([Q_{pmT43_{FGM}}][A_{pmT43_{FGM}}]^{-1}\{q^{e}_{pmT43_{FGM}}\}\right) dV^{e}$$
$$+ \int_{V^{e}} \left([Q_{pmT43_{FGM}}][A_{pmT43_{FGM}}]^{-1}\{\delta q^{e}_{pmT43_{FGM}}\}\right)^{T} \left[C_{T43_{Eq_{FGM}}}\right]$$
$$\left([Q_{T43_Eq_FGM}][A_{T43_Eq_FGM}]^{-1}\{q^{e}_{T43_Eq_FGM}\}\right) dV^{e} \tag{4.29}$$

L'intégrale sur le volume se décompose en une intégrale sur la surface du triangle dA et une intégrale unidimensionnelle sur z. Nous tirons l'intention du lecteur que :

$$\int_{z} C_{T43_Eq_FGM} \, . \, z. \, dz \tag{4.30}$$

Et

$$\int_{z} [C_{pmT43_FGM}] \, . \, z. \, dz \tag{4.31}$$

Deviennent :

$$\int_{z} \frac{\int_{z} E(z) z dz}{1-\nu^{2}} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} . \, dz \tag{4.32}$$

Qui représentent la rigidité des couplages membrane-flexion et flexion-membrane et $E(z) = (E_{c} - E_{m}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{p} + E_{m}$.

La matrice de couplage :

$$[K^{e}_{T43cmf_FGM}]$$

résultante de l'équation (4.24) fait intervenir les degrés de liberté de membrane et de flexion.

4.5. Formulation de l'élément de coque pour les FGM

Une fois les trois matrices de rigidité (membrane, flexion et couplage) sont évaluées, il nous reste qu'à combiner ces trois matrices pour formuler la matrice de rigidité de l'élément de coque triangulaire à facette plane.

Les ingrédients utilisés pour arriver à ce but sont :

- Utilisation de l'élément triangulaire T43_Eq_FGM pour ce qui est de la rigidité de membrane.
- Utilisation de l'élément triangulaire de plaque mince PMT43_FGM pour ce qui est de la rigidité de flexion
- Utilisation de l'élément triangulaire de couplage membrane-flexion (T43cmf_FGM).

La combinaison des trois matrices permet de conduire à la construction de la matrice de rigidité de l'élément de coque triangulaire pour les FGM. Cette matrice est pleine et symétrique. L'élément de coque peut avoir une orientation quelconque dans l'espace et dans le repère global d'une structure XYZ ; et il se représente dans son repère local xyz comme sur la figure (4.4).

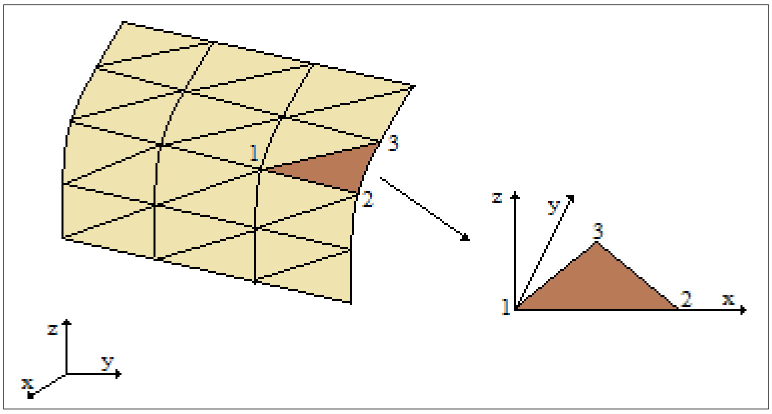


Figure 4.4. Représentation de l'élément de coque pour les FGM par rapport aux deux repères (global et local)

L'évaluation de la matrice de rigidité de l'élément de coque pour les FGM dans le repère global d'assemblage s'accomplit au biais de la matrice de rotation $[RO]$ comme suit :

$$\langle \delta U \rangle [K_G^e]\{U\} = \langle \delta U \rangle [RO]^T [K_L^e][RO]\{U\} = \langle \delta u \rangle [K_L^e]\{u\}$$
$$[K_G^e] = [RO]^T [K_L^e][RO] \tag{4.33}$$

et cela après éclatement des termes de rigidité des trois modes (membrane, flexion et couplage membrane-flexion) à l'intérieur de la matrice de rigidité de l'élément de coque de taille (18x18) au niveau élémentaire avant d'entamer l'opération d'assemblage qui se schématise sur les figures 4.5 et 4.6.

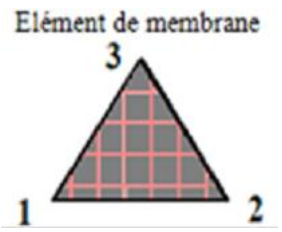
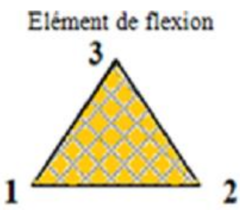
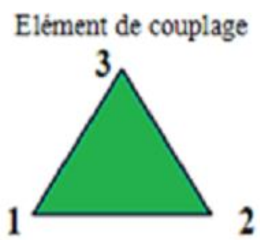
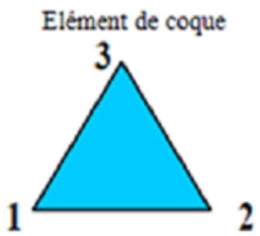
	9DDL	$\{u_1\ v_1\ \theta_{z1}\ u_2\ v_2\ \theta_{z2}\ u_3\ v_3\ \theta_{z3}\}^T$
	9DDL	$\{w_1\ \theta_{x1}\ \theta_{y1}\ w_2\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\ w_2\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\}^T$
	18DDL	$\begin{Bmatrix} u_1\ v_1\ w_1\ \theta_{x1}\ \theta_{y1}\ \theta_{z1}\ u_2\ v_2\ w_2\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\ \theta_{z2} \\ u_3\ v_3\ w_3\ \theta_{x3}\ \theta_{y3}\ \theta_{z3} \end{Bmatrix}^T$
	18DDL	$\begin{Bmatrix} u_1\ v_1\ w_1\ \theta_{x1}\ \theta_{y1}\ \theta_{z1}\ u_2\ v_2\ w_2\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\ \theta_{z2} \\ u_3\ v_3\ w_3\ \theta_{x3}\ \theta_{y3}\ \theta_{z3} \end{Bmatrix}^T$

Figure 4.5 Construction de l'élément de coque pour les FGM

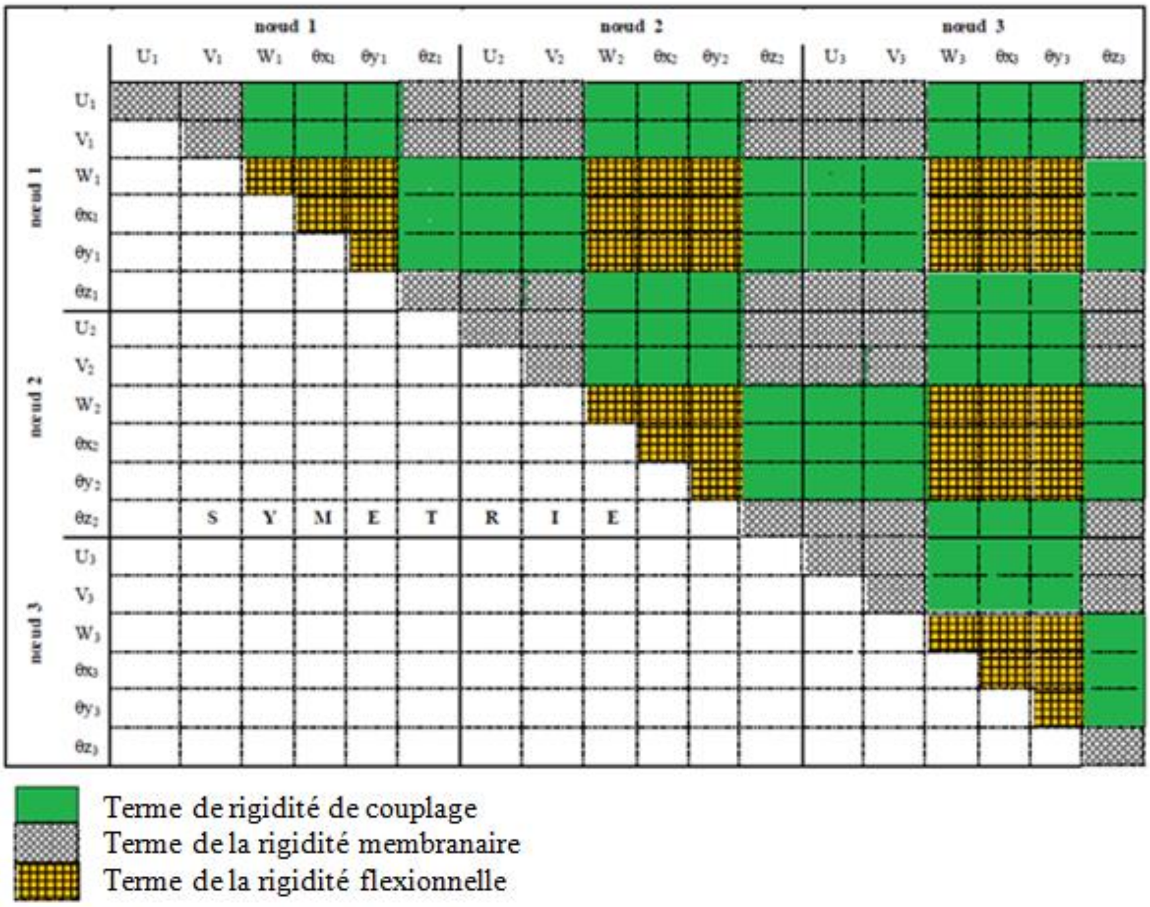


Figure 4.6 Structure type de la matrice de rigidité de l'élément coque FGM dans le repère local

4.6. Validation de l'élément de coque pour les FGM

Afin de mettre en valeur l'élément développé vis-à-vis des deux comportements de base, à savoir le comportement membranaire et le comportement flexionnel, nous avons traité les cas tests en dessous. Le résultat obtenu est comparé, à la solution de référence se trouvant dans la littérature.

4.6.1. Validation vis-à-vis du comportement flexionnel

Exemple 1. Console en FGM soumise à la flexion pure.

Afin de voir la validité de notre élément à modéliser correctement le comportement flexionnel d'une structure en FGM; nous considérons la console en FGM de la figure 4.7. Elle a une épaisseur h=0.1m, une longueur L=10m et une largeur b=1m. Elle est composée d'un mélange de deux matériaux différents, à savoir du métal et de la céramique ; et elle est sollicitée à la flexion par une charge P=0.1Pa (figure 4.7.). La surface supérieure est faite entièrement en

céramique tandis que celle inférieure est en métal. Les propriétés mécanique de la céramique sont $E_c = 1.2E6$ GPa,$\nu_c = 0$ et celles du métal sont $E_m = \frac{E_c}{2}$, $\nu_m = 0$. Les coordonnées x et y sont dans le plan de la console tandis que l'axe z est perpendiculaire au plan de la console (dirigé selon l'épaisseur).

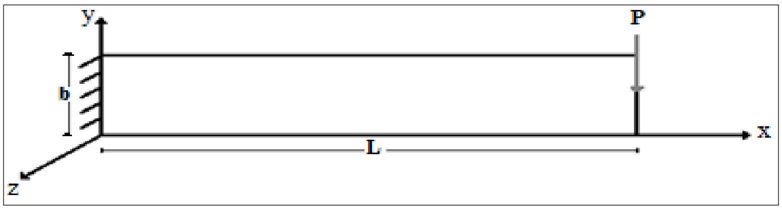


Figure 4.7. Une console en FGM soumise à la flexion par une charge ponctuelle

Tableau 4.1. Les déplacements w au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau

Paramètre du Matériau (P)	**Ziou (2017)**		**Present element**		**Solution de comparaison**
	W	**U**	**W**	**U**	
0	3,42E-01	0,00E+00	3,40E-01	-0,00E-04	3,33E-01
1	4,57E-01	-3,86E-04	4,60E-01	-3,90E-04	4,62E-01
2	4,89E-01	-4,68E-04	4,92E-01	-4,70E-04	4,99E-01
3	5,07E-01	-4,64E-04	5,11E-01	-4,67E-04	5,15E-01
4	5,21E-01	-4,39E-04	5,23E-01	-4,43E-04	5,25E-01
5	5,33E-01	-4,09E-04	5,34E-01	-4,13E-04	5,34E-01

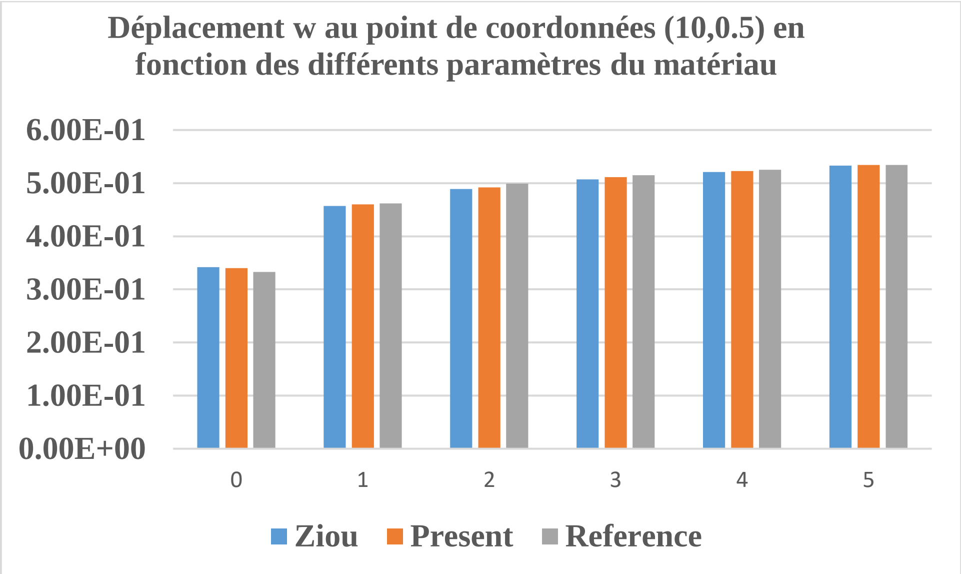


Figure 4.8. Les déplacements w au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau

Le tableau 4.1 et la figure 4.8 regroupent les résultats du déplacement w à l'extrémité de la console en FGM (x=10,y=0.5) en fonction des différents paramètres du matériau. Nous comparons nos résultats avec ceux de Ziou (2017) et la solution de référence (solution analytique). Nous constatons que les déplacements de la console complètement en céramique sont moins importants que ceux de la console en FGM. Ceci est dû au fait que les valeurs les plus élevée de p correspondent à une haute contribution du métal. Nous notons aussi que les déplacements transversaux augmentent quand l'indice du matériau p augmente. Les résultats obtenus avec le présent élément sont très performants en les comparants avec ceux obtenus par Ziou en 2017 et la solution de référence. Nous notons aussi l'existence du déplacement axial non nul, dans le cas de la console en FGM, bien que le test soit à flexion pure. Chose qui n'apparait pas dans le cas de la console homogène isotrope (p=0).

Exemple 2. Une plaque carrée en FGM simplement appuyée soumise à une charge concentré ou répartie

Considérons une plaque carrée en FGM composée d'une part de la céramique (Alumine) sur la face supérieure et d'autre part du métal (Aluminium) sur la face inférieur. Les caractéristiques mécaniques des deux matériaux sont : Céramique (alumine) : $E_c = 380$ GPa, métal (aluminium) : $E_m = 70$ GPa, $\nu_c = \nu_m = 0.3$. La plaque est simplement supportée et elle est sollicitée une fois par une charge concentrée au milieu F et une autre fois par une charge uniformément répartie q_0.

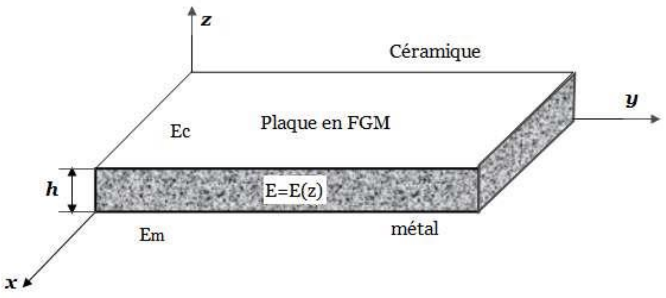


Figure 4.9 Plaque carrée en FGM simplement appuyée soumise à la flexion

Les résultats des déplacements adimensionnels au centre (w_c) de la plaque FGM soumise à une charge concentré F pour un premier cas et une charge répartie q_0 dans un deuxième cas se normalisent respectivement par les équations suivantes :

$$\frac{\overline{w}_c D}{F a^2} \times 10^3 \qquad \frac{\overline{w}_c D}{q_0 a^4} \times 10^3 \qquad D = \frac{1}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{+h/2} E(z) z^2 dz \qquad (4.34)$$

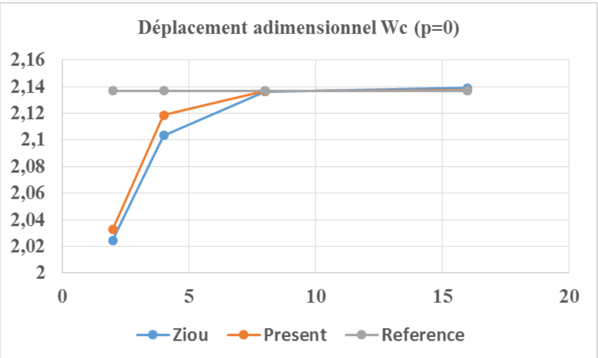
$\overline{w}_c$: Le déplacement au centre de la plaque FGM,

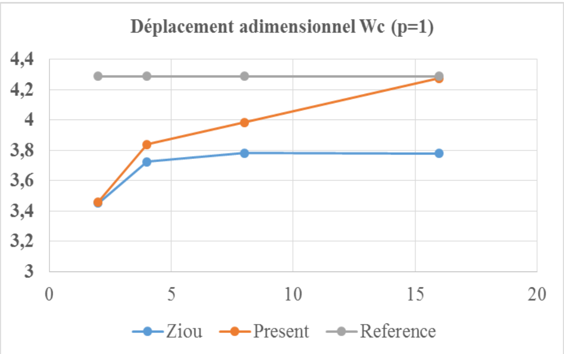
a : La longueur du côté de la plaque.

Les deux tableaux 4.2 et 4.3 et les figures 4.10 et 4.11 rassemblent les déplacements adimensionnels au centre de la plaque FGM pour : les deux cas de chargement, les différentes valeurs du paramètre du matériau et pour différents maillage. Les résultats obtenus par le présent élément sont en bon accord avec ceux données par Shi-Rong Li en 2015 et Ziou en 2017. Ils démontrent une convergence rapide de notre élément vers les solutions de référence pour les deux cas de chargement et pour les différentes valeurs du paramètre du matériau p.

Tableau 4.2. Les déplacements adimensionnels W_c au centre d'une plaque carrée en FGM simplement appuyée soumise à une charge concentrée

Paramètre P	Maillage	2x2	4x4	8x8	16x16	Shi-Rong Li
P=0	Ziou	2,0245	2,1035	2,1365	2,1392	2,1371
	Présent	2,0327	2,1187	2,1367	2,1372	
P=1	Ziou	3,4527	3,7243	3,7822	3,7794	4,2876
	Présent	3,4599	3,8376	3,9831	4,2754	
P=2	Ziou	4,0253	4,4402	4,5049	4,4961	5,4947
	Present	4,1478	4,5712	4,8495	5,3137	
P=3	Ziou	4,3770	4,8400	4,9097	4,8995	6,0370
	Present	4,9658	5,2643	5,8219	6,0083	
P=10	Ziou	5,9299	6,3482	6,4480	6,4459	7,1333
	Present	6,0376	6,7965	6,9031	7,0765	
Métal	Ziou	11,0012	11,4187	11,5985	11,6129	11,602
	Present	11,0064	11,4389	11,5988	11,6123	





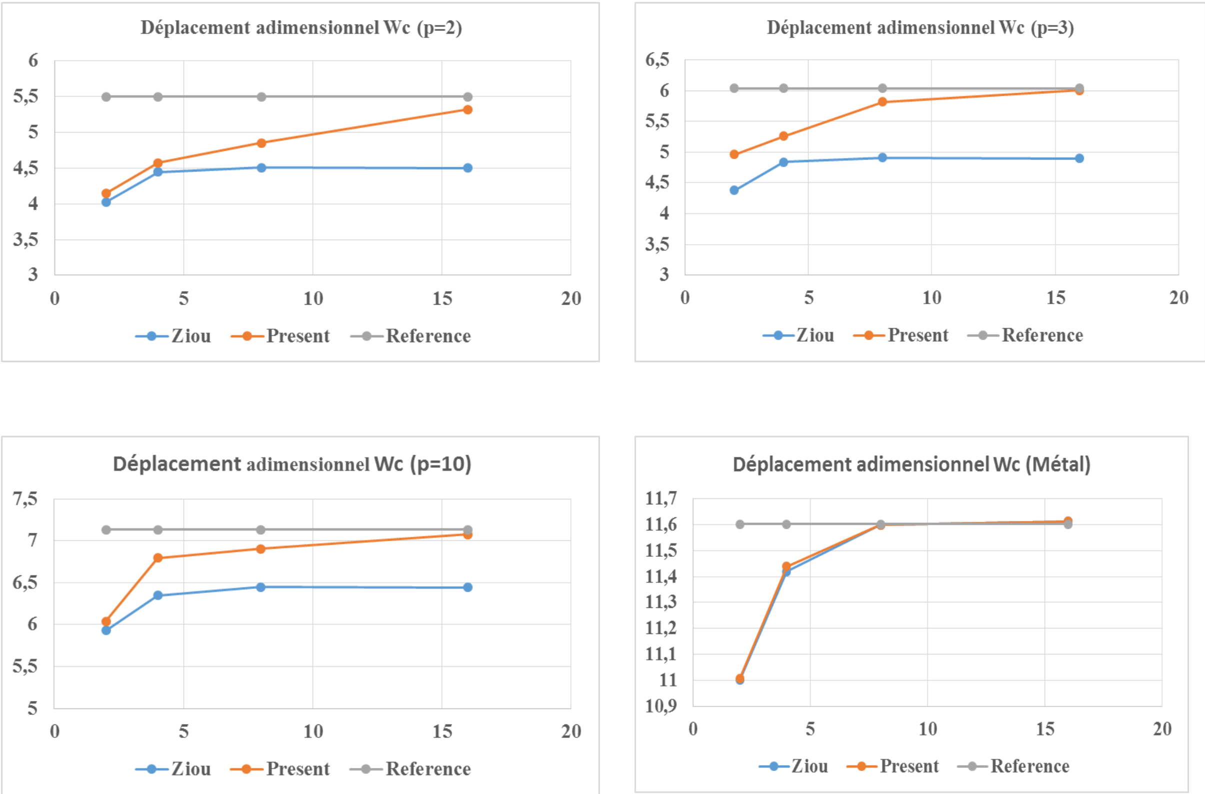


Figure 4.10. Les déplacements adimensionnels au centre d'une plaque carrée en FGM simplement appuyée soumise à une charge concentrée en fonction du paramètre du matériau p.

Tableau 4.3. Les déplacements adimensionnels W_c au centre d'une plaque carrée en FGM simplement appuyée soumise à une charge répartie

Paramètre P	Maillage	2x2	4x4	8x8	16x16	Shi-Rong Li
P=0	Ziou	0,5061	0,6985	0,7391	0,7408	0,7483
	Présent	0,5074	0,6995	0,7398	0,7488	
P=1	Ziou	0,8631	1,2316	1,2968	1,3966	1,5012
	Présent	1,0876	1,3258	1,4721	1,5008	
P=2	Ziou	1,0063	1,4640	1,5357	1,8701	1,9238
	Present	1,1954	1,4710	1,5892	1,9106	
P=3	Ziou	1,0942	1,5953	1,6727	1,8976	2,1137
	Present	1,2745	1,7019	1,8792	2,067	
P=10	Ziou	1,4824	2,1012	2,2150	2,3187	2,4976
	Present	1,5801	2,1976	2,3391	2,4892	
Métal	Ziou	2,7475	3,7920	4,0122	4,0439	4,0620
	Present	2,8460	3,8723	4,0276	4,0641	

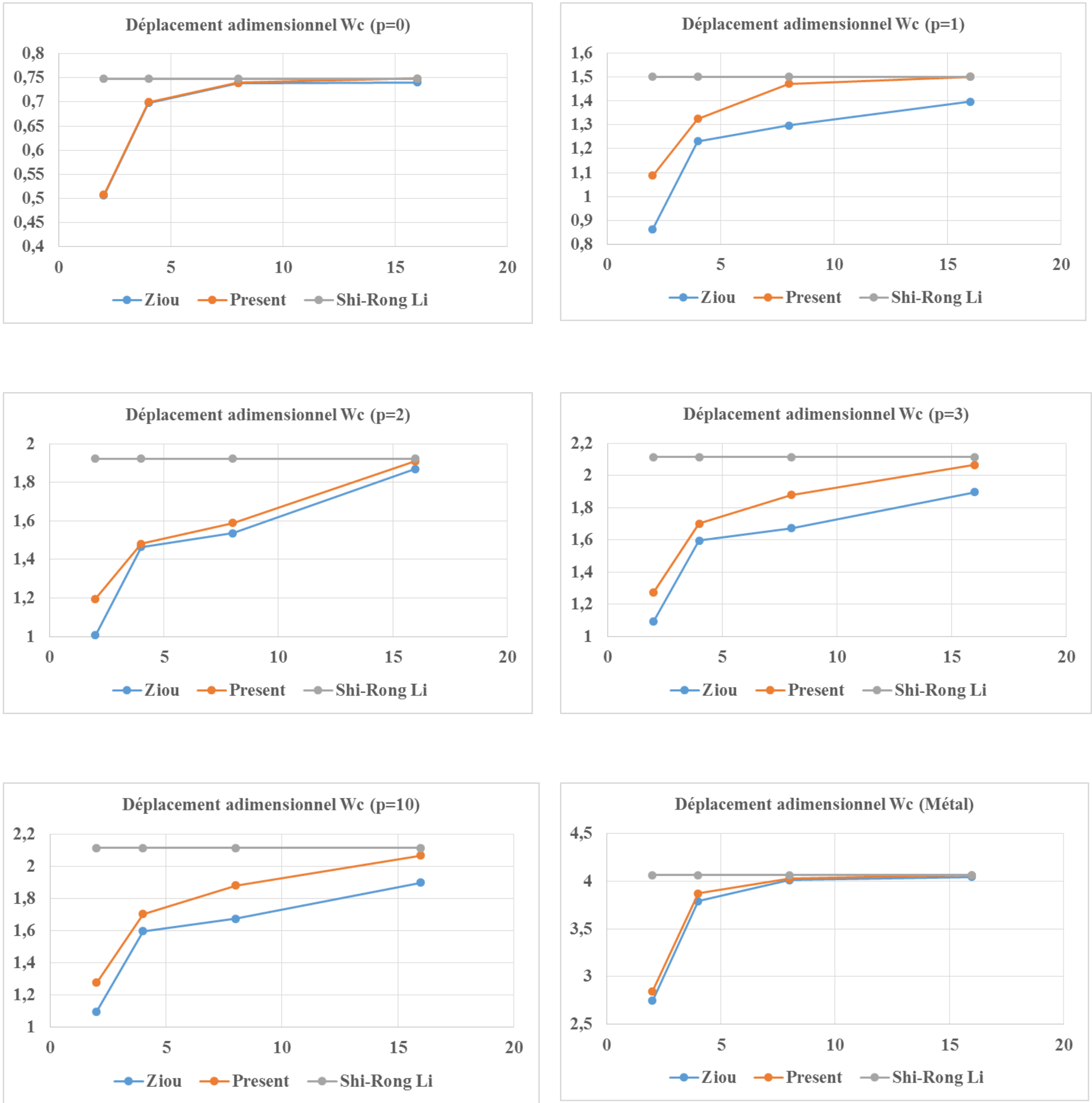


Figure 4.11. Les déplacements adimensionnels W_c au centre d'une plaque carrée en FGM simplement appuyée soumise à une charge répartie en fonction du paramètre du matériau p.

Nous remarquons aussi que nos résultats et ceux de Ziou (2017) sont proches les uns aux autres pour le cas de matériaux isotrope et pour le cas de matériaux FGM avec p paire. Nos résultats pour des p impaires sont plus performants que ceux de Ziou (2017).

4.6.2. Validation vis-à-vis du comportement membranaire

Nous reprenons l'exemple précédent de la console sous flexion avec les mêmes données géométriques et mécaniques du matériau ; mais cette fois ci la console FGM est sollicitée à la membrane pure (traction pure) par une charge P=0.1Pa, comme s'est représentée sur la figure 4.12.

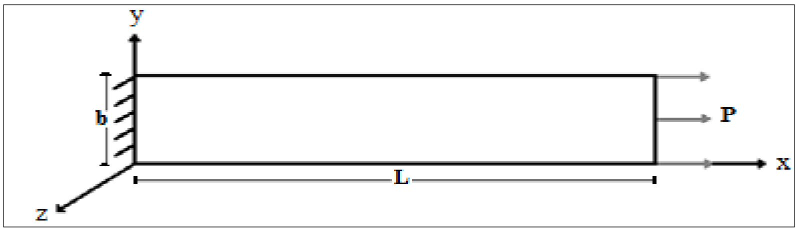


Figure 4.12 Console en FGM soumise à la traction.

Tableau 4.4 Les déplacements u au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau

Paramètre du Matériau (P)	**Ziou (2017)**		**Present element**		**Solution de comparaison**
	U	**W**	**U**	**W**	
0	8,59E-06	0,00E+00	8,47E-6	0,00	8,33E-06
1	1,15E-05	3,82E-04	1,15E-5	3,83E-4	1,15E-05
2	1,29E-05	4,64E-04	1,30E-5	4,65E-4	1,31E-05
3	1,37E-05	4,60E-04	1,38E-5	4,61E-4	1,39E-05
4	1,43E-05	4,34E-04	1,44E-5	4,35E-4	1,44E-05
5	1,47E-05	4,05E-04	1,47E-5	4,19E-4	1,47E-05

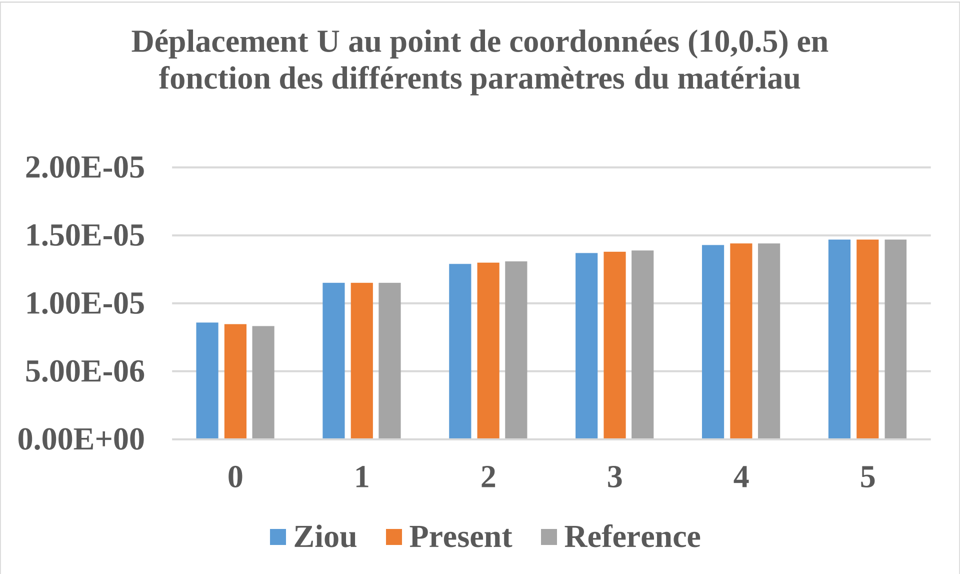


Figure 4.13 Les déplacements u au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau

Le tableau 4.4 et la figure 4.13 regroupent les résultats du déplacement U à l'extrémité de la console en FGM (x=10,y=0.5) en fonction des différents paramètres du matériau. Nous comparons nos résultats avec ceux de Ziou (2017) et la solution de référence (solution

analytique). Nous relevons que les déplacements U de la console entièrement en céramique sont plus petits que ceux de la console en FGM. La raison c'est que les valeurs les plus élevée de p concordent à une forte contribution du métal. Nous notons aussi que les déplacements membranaires U accroissent quand l'indice du matériau p augmente. Nous notons pareillement l'existence du déplacement transversal W non nul, dans le cas de la console en FGM, bien que le test soit à membrane pure. Chose qui n'apparait pas dans le cas de la console isotrope (p=0).Les résultats obtenus avec notre élément sont très performants en les comparants avec ceux obtenus par Ziou en 2017 et la solution de référence.

4.7. Conclusion

L'objectif principal du présent chapitre est la construction d'un élément fini de coque FGM permettant de prendre en compte l'essentiel des situations rencontrées dans le calcul des ouvrages. Nous avons développé un élément plat à facette plane triangulaire à trois nœuds et à six degrés de libertés par nœud, avec un vraie sixième DDL de rotation autour de la normale, permettant la discrétisation des structures coques FGM.

Le développement de notre élément est basé sur une formulation dite spéciale fondée sur l'approche en déformation, ce qui a permis l'enrichissement et le haussement du degré de polynôme d'interpolation des deux champs de déplacements, membranaire et flexionnel, avec le même degré. Cette pensée et ce raisonnement permet d'éviter le problème d'incompatibilité entre les déplacements membranaires et flexionnels.

La bonne performance de notre élément est clairement observable à travers la série de tests de validation.

4.8. Bibliographie

Benyamina, A. B., Bouderba, B., & Saoula, A. (2017). Bending Response of Composite Material Plates with Specific Properties, Case of a Typical FGM" Ceramic/Metal" in Thermal Environments. Periodica Polytechnica Civil Engineering. https://doi. org/10.3311/PPci.11891

Delale, F., F. Erdogan (1983) The crack problem for a nonhomo-geneous plane. Journal of Applied Mechanics 50(3): 609-614.

Guenfoud Hamza., Ziou H., Himeur M., & Guenfoud M. (2016). Analyses of a composite functionally graded material beam with a new transverse shear deformation function. Journal of Applied Engineering Science & Technology, 2 (2), 105-113. Classe C

Hamza Guenfoud, Hassina Ziou, Mohamed Himeur, Mohamed Guenfoud (2016) An exact beam finite element based on a new polynomial shear function, 12th International Congress on Advances in Civil Engineering, 21-23 September 2016, Istanbul, Turkey, http://www.ace2016.org/en/PROGRAM.html

Guenfoud Hamza, Mohamed HIMEUR, Abdesselam ZERGUA, Hassina ZIOU, and Mohamed GUENFOUD (2017). A thin flat shell finite element based on the strain approach with a true rotation. RUGC, Rencontres Universitaires de Génie Civil, 22-24 mai 2017, Nantes, France

Guenfoud Hamza., Himeur Mohamed, Ziou Hassina & Guenfoud Mohamed (2018). A Consistent triangular thin flat shell finite element with drilling rotation based on the strain approach. International Journal of Structural Engineering (IJSTRUCTE), vol.9, N°3, pages 191-223, DOI: 10.1504/IJSTRUCTE.2018.10014819, http://www.inderscience.com

Guenfoud, Hamza, Himeur, Mohamed, Ziou, Hassina, *et al.* The use of the strain approach to develop a new consistent triangular thin flat shell finite element with drilling rotation. *Structural Engineering And Mechanics*, 2018, vol. 68, no 4, p. 385-398.

Himeur M. (2008). Développement d'éléments membranaires nouveaux d'élasticité plane basés sur la formulation en déformation. Thèse de magistère, Université du 8 Mai 1945 Guelma (Algérie), Département de Génie Civil et d'Hydraulique.

Himeur M. and Guenfoud M. (2008). Elément fini triangulaire nouveau à nœud central perturbé en formulation déformation avec «drilling rotation». CIFMA 3, 21-23; Alep.

Himeur M., Benmarce A. & Guenfoud, M. (2014). A new finite element based on the strain approach with transverse shear effect. Structural Engineering and Mechanics, 49(6), 793-810. DOI: http://dx.doi.org/10.12989/sem.2014.49.6.793

Shi-Rong Li, Xuan Wang, Romesh C.Batra, (2015), correspondence Relations Between Deflection, Buckling Load, and Frequencies of Thin Functionally Graded Material Plates and Those of Corresponding Homogenous Pates, Journal of Applied Mechanics; 82(11):111006-111006-8.

Ziou Hassina, Guenfoud Hamza, Guenfoud Mohamed, (2016), "Numerical modeling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method'', International Journal of Structural Engineering, 7 (2), 2016 http://www.inderscience.com/jhome.php?jcode=ijstructe, ISSN(online)=1758-7336, ISSN(print)=1758-7328, SJR=0,2 (2015), Hindex=6, Classe B

Ziou Hassina, Guenfoud Hamza, Himeur Mohamed & Guenfoud Mohamed (2017)
Numerical modeling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method
Courrier du Savoir, N° 24, 2017, UIF=1.1640, Nationale, Classe C

Ziou Hassina (2017)
Contribution à la modélisation des structures en Matériaux à Gradient Fonctionnel
Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider, Biskra, 23-04-2017

ANNEXE I – Matrice $\left[K_0\right]$ Elément $T_{43_Eq_FGM}$

$$\left[K_0\ \right] = \frac{\int E(z)dz}{(1-\nu^2)} \iint [Q]^T \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} [Q]dxdy \quad \text{avec} \quad H_{\alpha\beta} = \iint x^{\alpha} y^{\beta}\, dx.dy \tag{4.35}$$

*** Forme générale**

$$\left[K_0\ \right] = \frac{\int E(z)}{(1-\nu^2)} \left(\iint \frac{1}{E(z)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2\nu y & 2y & -4x(1+\nu) \\ 2x & -2\nu x & -4y(1+\nu) \\ -6\nu x & 6x & 0 \\ 6y & -6\nu y & 0 \\ -6\nu xy & 6xy & -6x^2(1+\nu) \\ 6xy & -6\nu xy & -6y^2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{E(z)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2\nu y & 2x & -6\nu x & 6y & -6\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & -2\nu x & 6x & -6\nu y & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4x(1+\nu) & -4y(1+\nu) & 0 & 0 & -6x^2(\end{bmatrix} \right. \tag{4.36}$$

<u>* Forme développée avant intégration analytique</u>

$$
[K_0] = \frac{1}{\int E(z)dz}\left(\iint \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 2x & 0 & 6y & \\
0 & 0 & 0 & \frac{\nu}{(1-\nu^2)} & \frac{1}{(1-\nu^2)} & 0 & 2y & 0 & 6x & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{(1+\nu)} & -4x & -4y & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2y & -4x & [4y^2+8x^2(1+\nu)] & [-4\nu xy+18xy(1+\nu)] & 12xy & -12y^2 & [\\
0 & 0 & 0 & 2x & 0 & -4y & [-4\nu xy+18xy(1+\nu)] & [4x^2+8y^2(1+\nu)] & -12\nu x^2 & 12xy & [- \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6x & 0 & 12xy & -12\nu x^2 & 36x^2 & -36\nu xy & \\
0 & 0 & 0 & 6y & 0 & 0 & -12y^2 & 12xy & -36\nu xy & 36y^2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6xy & -6x^2 & [12xy^2+12x^3(1+\nu)] & [-12\nu yx^2+12yx^2(1+\nu)] & 36yx^2 & -36\nu xy^2 & [\\
0 & 0 & 0 & 6xy & 0 & -6y^2 & [-12\nu xy^2+12xy^2(1+\nu)] & [12yx^2+12y^3(1+\nu)] & -36\nu yx^2 & 36xy^2 & [-3
\end{bmatrix}\right. \qquad (4.37)
$$

<u>* Forme développée après intégration analytique</u>

$$[K_0] = \frac{1}{\int \mathrm{E(z)dz}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mathrm{H}_{00}}{(1-\nu^2)} & \frac{\mathrm{H}_{00}.\nu}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 2.\mathrm{H}_{10} & 0 & 6.\mathrm{H}_{01} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mathrm{H}_{00}.\nu}{(1-\nu^2)} & \frac{\mathrm{H}_{00}}{(1-\nu^2)} & 0 & 2.H_{01} & 0 & 6.\mathrm{H}_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathrm{H}_{00}}{(1+\nu)} & -4.H_{10} & -4.H_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.H_{01} & -4.H_{10} & [4.\mathrm{H}_{20}+8.\mathrm{H}_{20}(1+\nu)] & [-4.\mathrm{H}_{11}+18.\mathrm{H}_{11}(1+\nu)] & 12.\mathrm{H}_{11} & -12.\mathrm{H}_{02} \\ 0 & 0 & 0 & 2.\mathrm{H}_{10} & 0 & -4.H_{01} & [-4.\mathrm{H}_{11}+18.\mathrm{H}_{11}(1+\nu)] & [4.\mathrm{H}_{20}+8.\mathrm{H}_{20}(1+\nu)] & -12.\nu.\mathrm{H}_{20} & 12.\mathrm{H}_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.\mathrm{H}_{10} & 0 & 12.\mathrm{H}_{11} & -12.\mathrm{H}_{20} & 36.\mathrm{H}_{20} & -36.H_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 6.\mathrm{H}_{01} & 0 & 0 & -12.\mathrm{H}_{20} & 12.\mathrm{H}_{11} & -36.H_{11} & 36.\mathrm{H}_{02} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.H_{11} & -6.\mathrm{H}_{20} & [12.\mathrm{H}_{12}+12.\mathrm{H}_{30}(1+\nu)] & [-12.\nu.\mathrm{H}_{21}+12.\mathrm{H}_{21}(1+\nu)] & 36.\mathrm{H}_{21} & -36.\nu.\mathrm{H}_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 6.H_{11} & 0 & -6.\mathrm{H}_{20} & [-12.\nu.\mathrm{H}_{12}+12.\mathrm{H}_{12}(1+\nu)] & [12.\mathrm{H}_{21}+12.\mathrm{H}_{03}(1+\nu)] & -36.\nu.\mathrm{H}_{21} & 36.\mathrm{H}_{12} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

ANNEXE II – Matrice $[K_0]$ Elément de plaque mince FGM ‘PM_{T43_FGM}’

*** Forme générale**

$$[K_0] = \frac{\int E(z) z^2}{(1-\nu^2)} \left(\iint \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & 0 & 2x \\ xy & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 2y \\ 0 & y & 0 \\ 0 & xy & y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & x^2 & 0 & 2y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix} dxdy \right) dz \tag{4.40}$$

$$[K_0] = \frac{\int E(z) z^2}{(1-\nu^2)} \left(\iint \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & x & y & xy & \nu & \nu x & \nu y & \nu xy & 0 \\ & & & & x^2 & xy & x^2y & \nu x & \nu x^2 & \nu xy & \nu x^2 y & 0 \\ & & & & & 4x^2d + y^2 & 2x^3d + xy^2 & \nu y & xy(\nu + 4d) & \nu y^2 & xy^2(\nu + 2d) & 2xd \\ & & & & & & x^4d + x^2y^2 & \nu xy & x^2y(\nu + 2d) & \nu xy^2 & x^2y^2(\nu + d) & x^2d \\ & & & & & & & 1 & x & y & xy & 0 \\ & & & & & & & & x^2 + 4dy^2 & xy & x^2y + 2dy^3 & 2yd \\ & & & & & & & & & y^2 & xy^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & x^2y^2 + y^4d & y^2d \\ & & & & & & & & & & & d \end{bmatrix} dxdy \right) dz \tag{4.41}$$

*** Forme développée après intégration analytique**

$$[K_0] = \frac{\int E(z)z^2 d\,z}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & H_{00} & H_{10} & H_{01} & H_{11} & \nu H_{00} & \nu H_{10} & \nu H_{01} & \nu H_{11} & 0 \\
 & & & & H_{20} & H_{11} & H_{21} & \nu H_{10} & \nu H_{20} & \nu H_{11} & \nu H_{21} & 0 \\
 & & & & & 4H_{20}d + H_{02} & 2H_{30}d + H_{23} & \nu H_{01} & H_{11}(\nu + 4d) & \nu H_{02} & H_{12}(\nu + 2d) & 2H_{10}d \\
 & & & & & & H_{40}d + H_{22} & \nu H_{11} & H_{21}(\nu + 2d) & \nu H_{12} & H_{22}(\nu + d) & H_{20}d \\
 & & & & & & & H_{00} & H_{10} & H_{01} & H_{11} & 0 \\
 & & & & & & & & H_{20} + 4dH_{02} & H_{11} & H_{21} + 2dH_{03} & 2H_{01}d \\
 & & & & & & & & & H_{02} & H_{12} & 0 \\
 & & & & & & & & & & H_{22} + H_{04}d & H_{02}d \\
 & & & & & & & & & & & H_{00}d
\end{bmatrix} \tag{4.42}$$

ANNEXE III – Matrice $[K_0]$ Elément de couplage membrane-flexion

Et flexion-membrane Pour la coque mince FGM

*** Forme générale (Couplage membrane-flexion)**

$$\left[K_0^{cpm-f}\right] = \frac{\int E(z)z}{(1-\nu^2)}\left(\iint \frac{1}{E(z)}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 \\
-2\nu y & 2y & -4x(1+\nu) \\
2x & -2\nu x & -4y(1+\nu) \\
-6\nu x & 6x & 0 \\
6y & -6\nu y & 0 \\
-6\nu xy & 6xy & -6x^2(1+\nu) \\
6xy & -6\nu xy & -6y^2(1+\nu)
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}
1 & \nu & 0 \\
\nu & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2x & -x^2 & 0 & -2y & 0 & -y^2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0
\end{bmatrix} dxdy\right) dz \tag{4.43}$$

<u>* Forme générale (Couplage flexion-membrane)</u>

$$\left[K_0^{cpf-m}\right] = \frac{\int E(z)z}{(1-\nu^2)}\left(\iint \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2x & -x^2 & 0 & -2y & 0 & -y^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{E(z)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2\nu y & 2y & -4x(1+\nu) \\ 2x & -2\nu x & -4y(1+\nu) \\ -6\nu x & 6x & 0 \\ 6y & -6\nu y & 0 \\ -6\nu xy & 6xy & -6x^2(1+\nu) \\ 6xy & -6\nu xy & -6y^2(1+\nu) \end{bmatrix} dxdy\right) dz \tag{4.44}$$

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

SOMMAIRE

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

1. Conclusions générales

Le but principal de cette thèse est de représenter une contribution à la modélisation par éléments finis des structures (poutre, plaque et coque) en matériau à gradient fonctionnel.

Au premier volet de cet recherche, nous avons développé une nouvelle fonction polynomiale de cisaillement transversal basé sur une théorie de poutre à déformation de cisaillement d'ordre supérieur, satisfaisant les conditions aux limites de contraintes de cisaillement nulles (conditions aux limites exactes sur la contrainte de cisaillement) à la fois sur les surfaces supérieure et inférieure d’une poutre FGM. La fiabilité, la précision, la performance et la polyvalence de la fonction de cisaillement développée ont été évaluées à travers une conséquence d’applications en flexion des poutres FGM avec différents cas de chargement, de géométrie et des conditions aux limites. Nous avons comparés nos résultats avec des solutions analytiques de références (Benchmark) et ceux obtenus par d’autres modèles. Pour les différentes analyses statiques les exemples numériques montrent que la fonction développée est capable de donner d'excellents résultats.

L’objectif du deuxième où le second volet de la présente recherche est la mise au point d'un élément fini, de coque mince à facette plane basé sur la formulation en déformation, triangulaire à trois nœuds et à six degré de liberté par nœud, destiné à la modélisation des structures courbe en FGM et permettant de prendre en compte l'essentiel des situations rencontrées dans le calcul des ouvrages. Nous avons adopté une approche basé sur l’utilisation d’élément à facette plane pour discrétiser les structures coques FGM. Le privilégie fondamental des éléments appartenant à cette classe est leur simplicité proportionnelle. En effet leur formulation repose sur les théories de membrane et des plaques. De ce fait, on contourne toutes les complexités dues à la prise en compte des courbures dans les théories des coques curvilignes. Par conséquent, la géométrie des coques FGM peut être approchée en utilisant les éléments plans par superposition d’un élément de membrane, d’un élément de flexion et un autre élément de couplage (dans le cas des FGM).

La comparaison des résultats obtenus avec des solutions de références, a montré la performance et la précision de l’approche proposée.

Nous notons que le présent travail de développement a été assidu par un autre de programmation en vue d’intégrer ces éléments au code de calcul « Eléments finis » disponible au niveau du Laboratoire de Génie Civil et d’Hydraulique de l’université de Guelma.

La programmation est faite avec le langage Fortran d'une part et le progiciel Mathematica d'autre part, et elle a consisté à intégrer les présents développements au code de calcul d'éléments finis du LGCH.

2. Perspectives pour l'étude future

La maturation de l'élément de coque en FGM reste nécessaire. En effet, un post-processeur de détermination des contraintes en chaque point et à chaque côte doit être mis au point. Ainsi, pour élargir l'application du présent élément de coque FGM aux analyses dynamique et de stabilité, nous devons développés les matrices de masse et des contraintes initiales ; chose qui n'est pas facile.